Universität Potsdam
Institut für Physik und Astronomie
Abgabe am 9. Juli 2020, 24 Uhr

SS2020: Übung 12
V: Feldmeier
Schwarz[1]

Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik[2] **20 Punkte**

1. Poisson-Klammer und Jacobi-Identität **2 Punkte**

X, Y, Z seien Funktionen der generalisierten Koordinaten q_k und der kanonisch konjugierten Impulse p_k. f sei die Anzahl der Freiheitsgrade.

Beweisen Sie: Die Poissonklammer erfüllt die Jacobi-Identität

$$\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0.$$

2. Poisson-Klammer **4 Punkte**

a] Formulieren Sie die kanonischen Gleichungen mit Poissonklammern.

b] Man zeige, dass die komplexe Amplitude $a = \dfrac{m\omega q + ip}{\sqrt{2\omega m}}$ des harmonischen Oszillators $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$ die Beziehung $\{a, a^*\} = -i$ erfüllt. Man zeige, dass $Q = a$ und $P = ia^*$ kanonische Koordinaten sind.

3. Poisson-Klammern **6 Punkte**

Gegeben sei ein Einteilchenproblem. Die drei Komponenten des Drehimpulses des Teilchen seien L_i. Berechnen Sie die folgenden Poisson-Klammern
(kartesische Koordinaten, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $r = |\vec{r}|$):

$$\{L_i, x_j\}, \qquad \{L_i, p_j\}, \qquad \{L^2, L_j\}, \qquad \{L_i, (\vec{r} \cdot \vec{p})\}, \qquad \{p_i, r^m\}$$

Hinweis: Verwenden Sie das ε_{ijk}-Symbol.

[1] udo.schwarz@uni-potsdam.de
[2] http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/2020SSMechanik.html
http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/

4. Drehungen **8 Punkte**

a) Die Matrix $a_{i\,j}$ bezeichne die Basis-Transformation $\hat{e}'_i = a_{i\,j}\,\hat{e}_j$. Zeigen Sie, dass aus den Orthonomierungsbedingungen für die kartesische Basis $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{i\,j}$ und $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{i\,j}$ die $a_{i\,j}$-Matrizen der orthogonalen Gruppe $O(n)$ angehören.
Welche Eigenschaft der Transformationsmatrizen kann man aus den beiden Bedingungen $a_{ik}\,a_{jk} = \delta_{ij}$ und $a_{ki}\,a_{kj} = \delta_{ij}$ ablesen?

Erinnerung: Für die orthogonale Gruppe ist $O^tO = OO^t = 1$. Für das Skalarprodukt gilt die Formel $(a, Ob) = (O^t a, b)$.

b) Zeigen Sie (per Index-Rechnung), dass Drehmatrizen orthogonal sind.

c) Klassifizieren Sie die beiden Matrizen. Sind es Drehmatrizen?

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\, B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Gegeben seien die Vektoren $x, x', y, y,' \in \mathbb{R}^n$, die sich durch Drehungen mittels Orthogonalmatrizen O gemäß $x' = O\,x$ und $y' = O\,y$ transformieren. Es gelte $y = A\,x$. Wie ist die quadratische Matrix A zu transformieren, damit $y' = A'\,x'$ (Kovarianz) gilt ? Beweisen Sie $A' = O\,A\,O^T$.