AOFD

erstmals

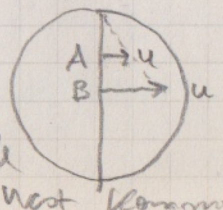
Sommersemester

2022

für

CLEWS

⊗ oder einfacher:

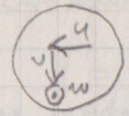


sinkt Luft von A nach B und behält ihre langsame Geschw. u, so bleibt sie hinter der schnell rotierenden Erde zurück, läuft nach West, kommt aus Ost

Zirkulation der Atmosphäre

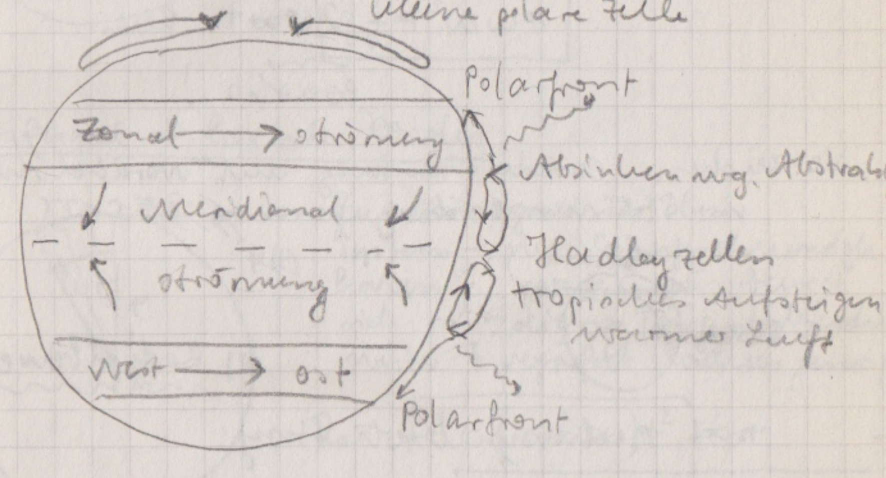
17. Feb. 2022

u = Westwind
v = Südwind
w = Aufwind



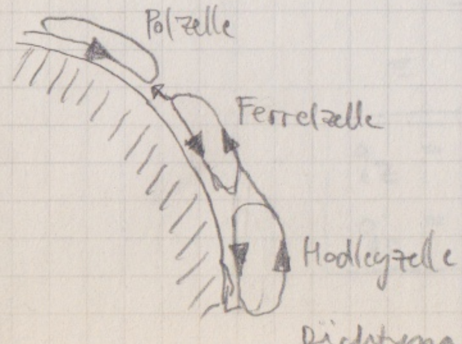
Zonale Komponente u ist die größte:
- Jet
- Passat

meridionale Komponente v (+ w):
- Zellen



(Bergmann-Schaefer, VII Erde + Planeten)

Tropopause am Pol: 8 km
Äqu: 16 km



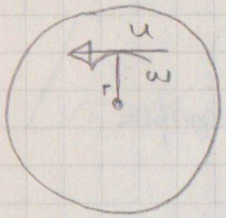
Hadley
- warme Äquatorluft steigt auf
- gibt Unterdruck auf Boden
- Luft vom Norden strömt ein auf N-Hemisphäre
- und wird durch Coriolis- ⊗ kraft nach rechts = W gelenkt
- also Nordostwinde

(Wind benannt nach Richtung, aus der er kommt.)

Coriolisbeschleunigung, anschaulich

(Bergmann - Schaefer VII E&P)

a) Tangentialbew.



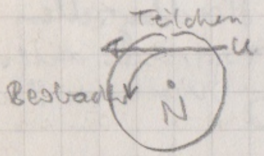
Scheibe

Rotation ω, Lineargeschw. u. gibt Gesamt zentrifugalbeschl.

$$\left(\omega + \frac{u}{r}\right)^2 r$$

$$= \omega^2 r + \underbrace{2u\omega}_{\text{Coriolis!}} + \text{klein}$$

Vorzeichen: Coriolisablenkung auf Nordhalbkugel in Strömungsrichtung gesehen RECHTS



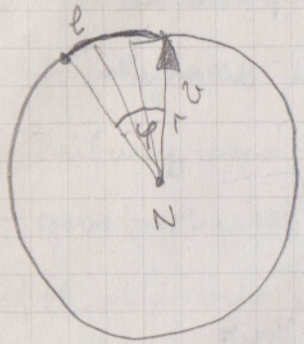
b) Radialbewegung

mit Drehimpulserhaltung:

lächerlich!

eigene Herleitung

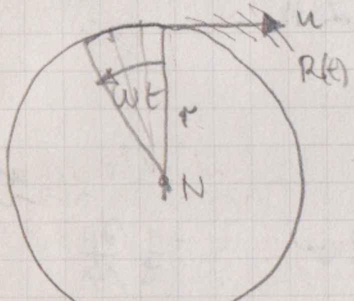
Radiale Coriolis



$$l = r\varphi$$
$$= vt \cdot \omega t$$
$$= \omega v t^2$$
$$\equiv \frac{1}{2} g_c t^2$$

$$\rightarrow \boxed{g_c = 2\omega v}$$

Zentrifugal & laterale Coriolis



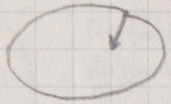
Zur Zeit 0 soll Teilchen System- plus Eigengeschwindigkeit haben, $\omega r \pm u$. Es bewegt sich mit dieser Tangentialgeschw. weiter & vergrößert Radius gemäß

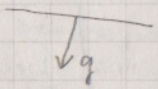
$$R = \sqrt{r^2 + (\omega r \pm u)t^2} - r \qquad -r$$
$$= r\sqrt{1 + \omega^2 t^2 \pm \frac{2\omega u}{r} t^2 + O(u^2)}$$
$$= r\left(1 + \frac{\omega^2 t^2}{2} \pm \frac{\omega u t^2}{r}\right) - r$$
$$= \frac{r\omega^2}{2} t^2 \pm \omega u t^2$$
$$\equiv \frac{1}{2}(g_Z + g_c) t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_Z &= r\omega^2 \\ g_c &= \pm 2\omega u \end{aligned}}$$

weitere Themen Zentri & Coriolis

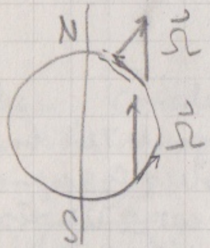
- Zentri weglassen wegen Erdabplattung

  und g_{eff}  lokale Normale

- dann Gezeiten auf See 

- Corolisparameter

  $f = 2\Omega \sin\beta$ β = Breite



$\vec{\omega}_h$ zeigt überall von S nach N

- Hydrogleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- Trägheitskreis im Ozean

Themen

- Boussinesque-Approx. → Chandrasekhar
- Froudezahl - Ekmanzahl
- Rossbyzahl
(- Reibungstensor → siehe mein Buch)
- geostrophe Näherung & Wind
- thermischer Wind

Geostrophe Näherung

nur: Druck- und Corioliskraft

Heuristik

Gegeben Druckgradient

Strömung von Hoch- nach Niederdruck, ∥ Druckgra[dient]

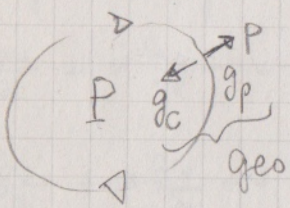
mit $\vec{u}$ wächst $\vec{g}_{cor}$

und lenkt Teilchen seitwärts ab

bis schließlich Bewegung ⊥ Druckgradient

d.h. entlang Isobaren

$P \xrightarrow[\vec{u}]{} p$ gibt



geostrophic balance

Antizyklon = Hochdrucksystem = im Uhrzeigersinn (N!)

$fv = \frac{1}{\rho} p_x$ d.h. $\vec{u} \cdot \nabla p =$

$fu = -\frac{1}{\rho} p_y$ $u p_x + v p_y = \rho u f v - \rho v f u = 0$

oder $\boxed{2\vec{\Omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p}$ $\Big| \cdot \vec{\Omega}$

$\boxed{\vec{\Omega} \times \nabla p = 0}$ $\nabla p \perp \vec{\Omega}$

I) $\hat{z} \times \nabla p = \hat{z} \times (p_x \hat{x} + p_y \hat{y})$ (Gradient in der xy-Ebene!)

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

$= p_x \hat{y} - p_y \hat{x}$

$\hat{y}$ $fv = \frac{1}{\rho} p_x \hat{y}$

$\hat{x}$ $fu = -\frac{1}{\rho} p_y \hat{x}$

also

$\Rightarrow f\vec{u} = \frac{1}{\rho} \hat{z} \times \nabla p$, $\vec{u} = (u, v)$

also $\boxed{\vec{u}_h = \frac{1}{\rho f} \hat{z} \times \nabla_h p}$ in der Ebene!

ist Lösung der geostrophen Strömung

II) Rotor der geostrophen Gleichung, $\rho = \text{const}$

$$\nabla \times (2\vec{\Omega} \times \vec{u}) = 0$$

Rotor vom Kreuzprodukt gibt

2 Divergenzen: $\nabla \cdot \vec{\Omega} = 0$, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

2 Richtungsableitungen $\nabla \vec{\Omega} = 0$ (konstant)

also muss $\boxed{(\vec{\Omega} \cdot \nabla)\, \vec{u} = 0}$ Taylor-Proudman

mit $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z} \rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$: geostrophic flows sind 2-D planar

Vorticity equation & Taylor-Proudman

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + 2\vec{\Omega}\times\vec{u}$$
$$= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\Phi + \nu\Delta\vec{u}$$

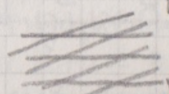
Vektor-ID: $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \vec{u}\times\underbrace{\nabla\times\vec{u}}_{\vec{\omega}}$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\times\vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{2}\nabla u^2 - \nabla\Phi + \nu\Delta\vec{u}$$

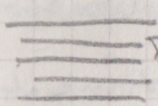
$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla\times\left[(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\times\vec{u}\right] = -\nabla\times\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{\omega}$$

NR1) $\nabla\times(a\vec{c}) = \nabla a\times\vec{c} + a\,\nabla\times\vec{c}$

also $-\nabla\times\frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla\frac{1}{\rho}\times\nabla p = \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}$

barocline Vektor  ∇p $\nabla\rho$

vs

barotropic flow  $\nabla\rho$ ∇p

NR2) $\nabla\times\left[(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\times\vec{u}\right]$

$$= (2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\,\nabla\cdot\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)(\overset{\text{const}}{\cancel{2\vec{\Omega}}}+\vec{\omega})$$
$$- \vec{u}\,\nabla\cdot(\underset{\text{const}}{\cancel{2\vec{\Omega}}}+\underset{\text{div}}{\cancel{\vec{\omega}}}) - \left[(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\cdot\nabla\right]\vec{u}$$
$$= (2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\,\nabla\cdot\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\omega}$$
$$-\left[(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\cdot\nabla\right]\vec{u}$$

also

$$\boxed{\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\omega}}_{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} &= \left[(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})\cdot\nabla\right]\vec{u} \\ &- (2\vec{\Omega}+\vec{\omega})(\nabla\cdot\vec{u}) \\ &+ \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} \\ &+ \nu\Delta\vec{\omega}\end{aligned}}$$

stretching
compressibility
baroclinity
viscosity

Vorticity equation

For small Rossby number this becomes

$$(2\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}$$

[vortex filaments maintain their identity

assume further $\nabla\rho\times\nabla p = 0$, then

$\boxed{(\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{u} = 0}$ Taylor-Proudman

Helmholtz (1858): barotropic, inviscid fluid:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{u}), \text{ mit (C) } \dot{\rho} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$
$$\rightarrow\ = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{\omega}\,\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\,\vec{u}\cdot\nabla\rho$$
$$= (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$\rightarrow \vec{\omega} \parallel \delta\vec{r}$ at $t=0$

$\Rightarrow \vec{\omega} \parallel \delta\vec{r}$ at $t>0$

vortex filament = line of particles along $\vec{\omega}$-curve

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{u}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\vec{\omega}}{\rho} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{u}}$$

vgl.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}\cdot\nabla)\vec{u}}$$

Dimensionslose Zahlen

Rossbyzahl $= \frac{F_{träge}}{F_{Coriolis}} = \frac{\text{Geschwindig}}{\text{Länge}\; f}$ $(f = 2\Omega \sin\varphi)$

Froudezahl $= \frac{F_{träge}}{F_{gravitat}} = \frac{\text{Geschwindig}}{\sqrt{gh}}$

Eckertzahl $= \frac{\text{Kinetische Energie}}{\text{Wärmeübertrag}} = \frac{v^2}{c_p \Delta T}$

Nusseltzahl $= \frac{\text{convection heat transfer}}{\text{conductive heat transfer}} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Wärmeleitung}}$

Pecletzahl $= \frac{\text{advektive Transportrate}}{\text{molekulare, diffusive Transportrate}} = \frac{Lu}{D}$ oder $\frac{Lu}{\alpha}$

Prandtlzahl $= \frac{\text{viskose Diffusion}}{\text{thermische Diffusion}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{Viskos.koeff.}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}}$

Rayleighzahl $= \frac{F_{Auftrieb}}{F_{viscosity}}$ oder $\frac{T_{Wärmeleitung}}{T_{Konvektion}}$

Reynoldszahl $= \frac{F_{träge}}{F_{viscos}}$

Richardsonzahl $= \frac{\text{Gravitationsenergie}}{\text{kinetische Energie}}$ oder $\frac{\text{Auftrieb}}{\text{Scherung } u'}$

Taylorzahl $= \frac{F_{zentri}}{F_{viscos}} = \frac{4\Omega^2 R^4}{\nu^2}$

Ekmanzahl $= \frac{F_{viscos}}{F_{Coriolis}} = \frac{\nu}{\Omega L^2}$ ← eddy viscosity!

$Ro \to 0$ geostrophe Approximation

$Fr < 1$: surface waves can propagate upstream

$Ec \ll 1$: „self-heating due to dissipation can be neglected"

Nusseltzahl ist „eine" Pecletzahl

mit D = Diffusionskoeffizient, α = thermische Diffusivität

Pr = Dicke von Strömungsgrenzschicht / Dicke Temperaturgrenzschicht

Rayleighzahl ist eine" Pecletzahl. Einsetzen von Konvektion
Rayleighzahl ist "die Reynoldszahl der Konvektion

Turbulenz!

$Ri > 1$: viel Auftrieb, Inhomogenität → atmosphärische Turbulenz

in rotierenden Couette flows.

$Ek = \frac{vis}{cor} = \frac{inert}{cor} \cdot \frac{vis}{inert} = Ro : Re$; aber auch $\sqrt{\frac{Ro}{Re}}$

Rossby : Reynolds

19.02.22

Seichtwasser

nicht Welle, sondern Störung

(I) Bewegungsgleichungen

$\rho = \text{const}$

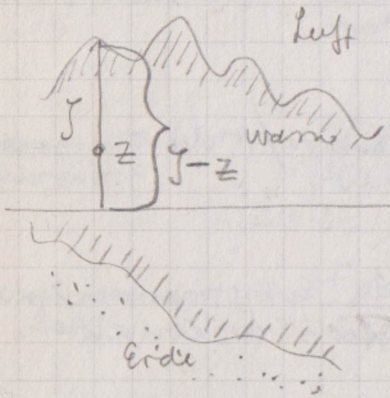
hydrostat. GG

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \text{da } w \text{ klein} \neq 0$$

d.h. $\Delta p(x,y,z,t) = -\rho g \, \Delta z$ (Minus problematisch)

Sei $\zeta(x,y,t)$ Höhe der Flüssigkeitsoberfläche

bzgl $z = 0$ (willkürlich)



z = 0 (beliebig)

Dann ist horizontale Kraft bei z:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta(x,y,t) - z\right]$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \frac{\partial}{\partial y}\left[\zeta(x,y,t) - z\right]$$

Die Neigung der Wasseroberfläche bestimmt die Kraft!

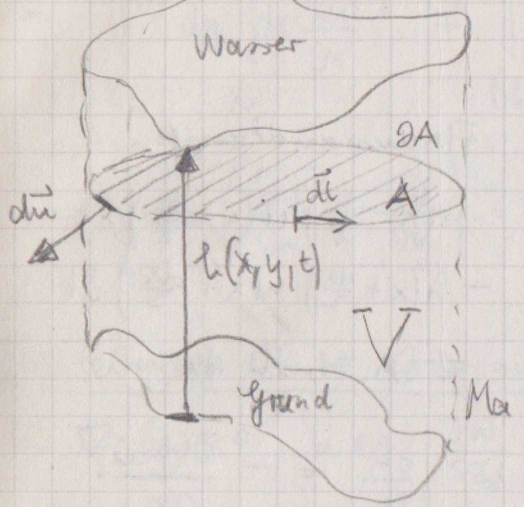
$$\boxed{\frac{Du}{Dt} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad \frac{Dv}{Dt} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

Sie ist unabhängig von der Höhe, z

$u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$

(II) Kontinuitätsgleichung

sei $\vec{u}(\vec{r},t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))$



Ein- und Ausfluss in V

$$\frac{dM}{dt} = -\rho \int_{Ma} d\vec{a}\cdot\vec{u}$$

$$= -\rho \oint_{\partial A} d\vec{n}\cdot h\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Gauß}\\ \text{2-D}\end{pmatrix} = -\rho \int_A da\, \nabla_h \cdot (h\vec{u})$$

nur x, y

führt zu Höhenänderungen

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\rho\int_A da\, h = \rho\int_A da\, \frac{\partial h}{\partial t}$$

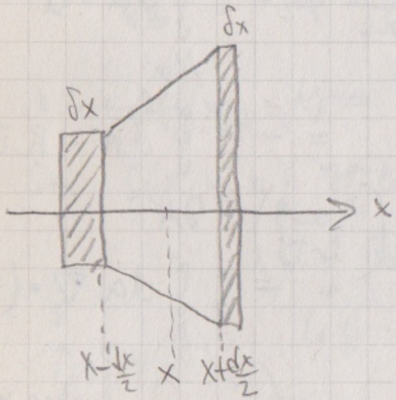
$$\longrightarrow \quad 0 = \int_A da \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot(h\vec{u})\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_h \cdot (h\vec{u}) = 0} \qquad \left(\nabla_h = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$$

oder mit $h(x,y,t) = \underbrace{H(x,y)}_{\text{Meerestiefe}} + \zeta(x,y,t)$

vereinfachte Herleitung

- kein y
- kein Integral-Gauß,
- direkt $\partial/\partial x$



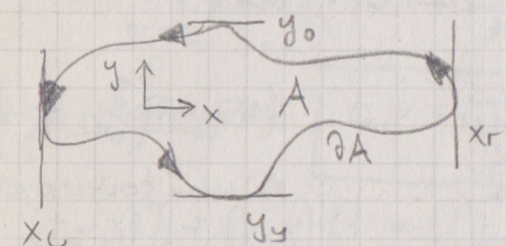
Flächenänderungen:

$$h\left(x-\frac{dx}{2}\right) u\left(x-\frac{dx}{2}\right) \delta t$$
$$- h\left(x+\frac{dx}{2}\right) u\left(x+\frac{dx}{2}\right) \delta t$$
$$= \delta A = \delta h \, dx$$

d.h. $\dfrac{\delta h}{\delta t} = - \dfrac{\partial (hu)}{\partial x}$

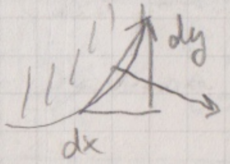
Addition $\left.\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|_x + \left.\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|_y$: $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial (hu)}{\partial x} + \dfrac{\partial (hv)}{\partial y} = 0}$

Erinnerung Gauß 2-D



$\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ entlang Kurve

$\vec{dn} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$ normal zu Kurve weg nach draußen



$\vec{dn} = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix}$ ✓

$$\oint_{\partial A} \vec{dn}\cdot\vec{u} = \oint_{\partial A} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \oint_{\partial A} dy\, u - \oint_{\partial A} dx\, v$$

Trick:

$$= \int_{y_u}^{y_o} dy\,(u_r - u_l) - \int_{x_l}^{x_r} dx\,(-v_o + v_u)$$

$$= \int_{y_u}^{y_o} dy \int_{x_l}^{x_r} dx \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{x_l}^{x_r} dx \int_{y_u}^{y_o} dy \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \int_A da \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Herleitung Conti 2-D aus Conti 3-D

20.2.22

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$, d.h. $\dfrac{\partial w}{\partial z} = - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Integriere dies vertikal vom Grund zu Oberfläche

$$w_{oben} - w_{unten} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Es ist $\boxed{w = \dfrac{d\zeta}{dt}}$ Lagrangeableitung! gemäß „Stunde Null"

Hier $\dfrac{d}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y}$

Aber auch unterer Rand ändert sich ... mit x, y!

Vallis hier unsauber (S.108), also

$$w_{oben} - w_{unten} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial (hu)}{\partial x} + \dfrac{\partial (hv)}{\partial y} = 0}$

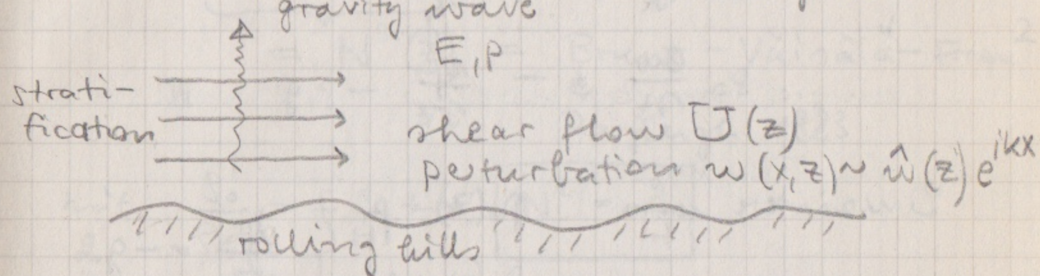
Vorlesungsumfang

1) Flüssigkeitsteilchen, $dV(\vec{r})$, $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$, Plasma: Hydro
2) Euler vs. Lagrange, material derivative
3) Kontinuitätsgleichung, Inkompressibilität
4) Eulergleichung, Bernoulligl.
5) Druck, Reibung, $\nu \Delta \vec{u}$, Cauchy Postulat
6) Drucktensor (samt Viskosität)
7) Navier-Stokes
8) Hydro aus Boltzmanngleichungen
9) Energiegleichung mikro, makro, Druckarbeit, adiab.
10) ideales Gas, barometrische Schichtung
11) phänomenolog. Thermodynamik
12) —"—
13) Scheinbeschleunigung (Erdabplattung, Tide im See)
14) —"—
15) —"— (Meeresströmung $g_c = g_z$)
16) Tensoren, auch in krummlinigen Koordinaten
17) Laplacegezeitengl. S. 62–65, f- und β-plane

Buoyancy-waves

2. 3. 22

einfachster Fall: im folgenden (nächste Seite) wird hergeleitet:



es ergibt sich:

$$\boxed{\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left(\ell^2(z) - k^2\right) \hat{w} = 0}$$

mit $\ell^2(z) = \dfrac{N^2(z)}{U^2} - \dfrac{1}{U} \dfrac{d^2 U}{dz^2}$

N = Brunt-Väisälä-Frequenz

Sei $\rho = \rho(S, s)$

entropy salinity

Annahme: dm behält S & s $\rightarrow \dfrac{d\rho}{dt} = 0$

Conti: $$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v})$$
$$= \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho}_{} + \rho\, \nabla \cdot \vec{v}$$
$$= \underbrace{\frac{d\rho}{dt}}_{=0} + \rho\, \nabla \cdot v$$

d.h. $\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0} \xleftrightarrow[\text{incompressible}]{} \boxed{\dfrac{d\rho}{dt} = 0}$

Jetzt Schritt für Schritt:

Euler $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$ I

$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial y}$ II

$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g$ III

Linearisiere um $\left.\begin{array}{l} p_0(z) + p_1 \\ \rho_0(z) + \rho_1 \end{array}\right\} \frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0$

$u_0 = 0$

$v_0 = 0$

$w_0 = 0$

Zustands-
glg

Konti a) $\frac{d\rho}{dt} = 0$: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0$ IV

b) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ V

sind 5 Glg für 5 unbekannte u, v, w, ρ_1, p_1

So von Rayleigh 1883

$\dot{\text{V}}$) $\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}$

I, II) einsetzen $= \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = \Delta_h p_1$ (A)

horizontal

$\dot{\text{III}}$, IV) $\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} + g w \frac{d\rho_0}{dz}$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w}_{} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} \qquad (B)$$

$= N^2(z) =$ Brunt-Väisälä-Frequ^2

Rayleigh 1883

mit $\frac{\rho_0'}{\rho_0} = - \frac{1}{H} \rightarrow \boxed{N^2 = \frac{g}{H}}$

Eliminate p_1 from (A) & (B):

(A) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Big| \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$

(B) $\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \Big| \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} \right) = \frac{1}{\rho_0} \Delta_h \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} p_1$$

$$= - \Delta_h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w \right)$$

also

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] w + N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = 0$$

Annahme: $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) w \approx \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$

$$\boxed{\Delta_3 \ddot{w} + N^2 \Delta_2 w = 0}$$

$\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$

$\Delta_3 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

WEITER NACH ZWEI SEITEN !

Ansatz $w = w_0 \, e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \rightarrow$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{(k^2+l^2)N^2}{k^2+l^2+m^2}}$$

d.h. $\omega \le N$

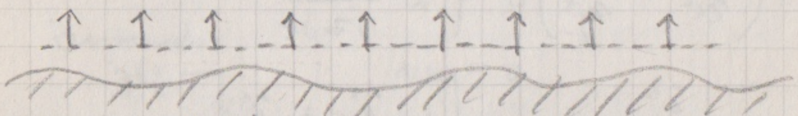
Maximalfrequ.

weitere Diskussion der Dispersionsrelation

im Fluidmechanikbuch

Anwendung, wie eingangs: Kap. 6.8

Interne Wellen durch Hügelketten („Wales")



flaches Gebirge ≈ horizontale Randquelle

sei λ = Abstand zweier Hügelmaxima

$k = 2\pi/\lambda$, $\quad h = h_0 \, e^{i \underbrace{k(x+Ut)}_{\omega = -Uk}}$

$$w = U \frac{\partial h}{\partial x} = \underbrace{U k h_0}_{= w_0} \, e^{i(kx-\omega t)}$$

sei N = const und $w = w_0 \, e^{i(kx+mz-\omega t)}$

mit $\omega^2 = \frac{k^2 N^2}{k^2+m^2}$

d.h. $k^2\omega^2 + m^2\omega^2 = k^2 N^2$

$$\boxed{m^2 = \frac{k^2(N^2-\omega^2)}{\omega^2} = \frac{N^2}{U^2} - k^2}$$

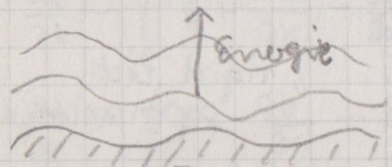
vertikaler Energietransport

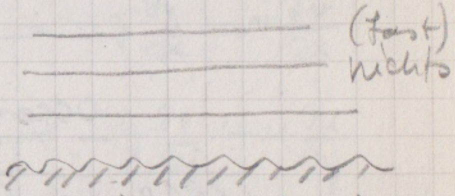
für $\omega^2 > N^2$ evanescent waves

$$w = w_0 \, e^{i(kx-\omega t)} \, e^{-\gamma z}$$

$$\boxed{\gamma^2 = k^2 - \frac{N^2}{U^2}}$$

kein vertikaler Energietransport





Hügel: λ groß

$k < N/U$: Welle

Hügel: λ klein

$k > N/U$: <u>trap</u>

cutoff-Frequenz λ $\begin{cases} 10 \text{ km Atmosphäre} \\ 300 \text{ m Tiefsee} \end{cases}$

weiter von vor 2 Seiten, also

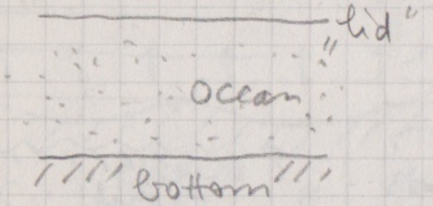
$$\boxed{\Delta_3 \ddot{w} + N^2 \Delta_2 w = 0}$$

Ocean = waveguide

$$w(x,y,z,t) = \hat{w}(z)\, e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

gibt $\quad \hat{w}'' + \frac{N^2-\omega^2}{\omega^2}(k^2+l^2)\,\hat{w} = 0 \quad$ (I)

sei $\hat{w} = 0$ für $z = 0$ und $-H$:



„rigid lid approximation"

dann Ocean = waveguide

(I) ist Oszillatorgl., also $\hat{w} = \sin(mz)$

mit $\quad m^2 = \frac{(k^2+l^2)(N^2-\omega^2)}{\omega^2}$

Randbedingung: $mH = n\pi$ gibt

$$\omega_n^2 = \frac{(k^2+l^2)N^2H^2}{n^2\pi^2+(k^2+l^2)H^2}, \quad n\in\mathbb{N}$$

diskretes Spektrum

dagegen Atmosphäre oben offen, semi infinite

$\longrightarrow$ ω kontinuierlich

Rossby

4.3.22

Gill, 7.10, S. 231ff

Seichtwasser

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Lagrange 1781: ergänze so

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)v = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Big(f + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}_{=\,\omega\,=\,(\mathrm{rot}\,\vec{u})_z\,=\,\nabla\times\vec{u}}\Big)u = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} - u\frac{\partial u}{\partial y}$$

1) 2) $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

Bernoulliparameter

$$B = g\eta + \tfrac{1}{2}(u^2+v^2) = e_{pot} + e_{kin}$$

(1) $\quad \frac{\partial u}{\partial t} - (f+\omega)v = -\frac{\partial B}{\partial x}$

(2) $\quad \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{(f+\omega)}u = -\frac{\partial B}{\partial y}$

$1/2\,\vec{f}$ $\parallel$

absolute vorticity, aus $\vec{u}_i = \vec{u}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r}$

$\longrightarrow \left.\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|_i = f+\omega$

eliminiere B: $(2)_x - (1)_y$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(f+\omega)u\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(f+\omega)v\right] = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\,\frac{\partial (f+\omega)}{\partial x} + v\,\frac{\partial (f+\omega)}{\partial y} + (f+\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial(\omega+f)}{\partial t} \qquad = 0$$

also $\frac{d}{dt}(f+\omega) + (f+\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

So auch direkt aus Helmholtz vorticity eq:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{\omega}}{\rho} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{u} \qquad \rho = \text{const}$$

mit $\vec{\omega} \longrightarrow f+\omega$ in z-Richtung:

$$\frac{d}{dt}(f+\omega) = \underbrace{(f+\omega)\frac{\partial}{\partial z}}_{\text{nur } z} w \leftarrow \text{nur } z$$

und $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \longrightarrow$

(3) $$\boxed{\frac{d}{dt}(f+\omega) + (f+\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0}$$

Contiglg: $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(H+\eta)u\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(H+\eta)v\right] = 0$

$\rightarrow$

(4) $$\boxed{\frac{d}{dt}(H+\eta) + (H+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0}$$

$$\frac{(3)}{f+\omega} - \frac{(4)}{H+\eta}: \quad \frac{d(f+\omega)/dt}{f+\omega} - \frac{d(H+\eta)/dt}{H+\eta} = 0$$

log. Ableitung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{f+\omega}{H+\eta}\right)} = 0}$$

Rossby 1936

potential vorticity Q: Rossby 1940

für $\eta \ll H$: $Q = \frac{f+\omega}{H\left(1+\frac{\eta}{H}\right)} = \cancel{\frac{f}{H}} - \frac{f\eta}{H^2} + \frac{\omega}{H} + O(\eta)$

const

also $\boxed{Q_{inf} = \frac{\omega}{H} - \frac{f\eta}{H^2}}$ so auch direkt aus lineares Wellenglg.

Def. cyclonisch: wenn Rotation in selbe Richtung wie $\vec{\Omega}$, also $\operatorname{sgn}\omega = \operatorname{sgn} f$

anticyclonisch: Rotation in umgekehrte Richtung wie $\vec{\Omega}$

d.h. wenn $H+\eta$ größer wird bei konst. f dann muss ω wachsen: cyclonic flow:

stretching of vortex line →	acquisition of cyclonic vorticity
shrinking —"— →	—"— of anticyclonic v

statt Zusammenfassung: dasselbe <u>linear</u>

Gill <u>7.2</u> S. 191 ff

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \overset{\text{„const}}{f} v = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \varepsilon_1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \varepsilon_2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \qquad \eta \qquad (3)$$

Kelvin 1879. $\quad (1)_x + (2)_y$:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\overset{(3)}{=} -\eta_{tt}/H} - f\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega} = -g\eta_{xx} - g\eta_{yy}$$

$c^2 = gH$

$$\rightarrow \boxed{\eta_{tt} - c^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + fH\omega = 0}$$

$-(1)_y + (2)_x$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0} \qquad \text{Vorticity eq.}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{f}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t} \;\swarrow (3)\; = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\omega}{H} - \frac{f\eta}{H^2}\right) = 0} \qquad \text{wie vorher}$$

linearisiert ist also

$$Q = \frac{\omega}{H} - \frac{f\eta}{H^2}$$ an jedem <u>Ort</u> konstant: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$!!

Kelvin war $Q = 0$ (1879)

erst Rossby $Q \neq 0$ (1938)

---

geostrophic balance: Coriolis = gravitativer „Druck"

$$fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$fv = g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

in $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ gibt

$$\boxed{\omega = \frac{g}{f}(\eta_{xx} + \eta_{yy})}$$

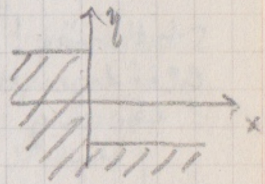
Gill S. 193/194:

<u>Coriolis Jet</u>

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

wähle Anfangsbedingungen

$$\eta(x, y, t=0) = -\eta_0 \,\mathrm{sgn}(x)$$



hat $\vec{v} = 0$ also $\vec{\omega} = 0$ also

(2) $$\left(\frac{\omega}{f} - \frac{\eta}{H}\right)(t=0) = \frac{\eta_0}{H}\,\mathrm{sgn}(x) = \left(\frac{\omega}{f} - \frac{\eta}{H}\right)(t)$$

(1) in (2): $$\frac{g}{f^2}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) - \frac{\eta}{H} = \frac{\eta_0}{H}\,\mathrm{sgn}(x)$$ oder

$$c^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) - f^2\eta = f^2\eta_0\,\mathrm{sgn}(x)$$

keine y-Abhängigkeit (!), $\eta = \eta(x,t) \rightarrow$

$$c^2 \eta_{xx} - f^2 \eta = f^2 \eta_0 \,\mathrm{sgn}(x)$$

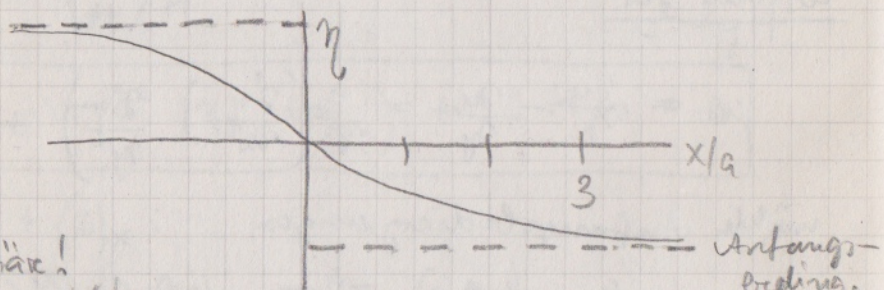
ist gewöhnliche DGL mit Lsg

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_0}} = \begin{cases} -1 + e^{-x/a} & \text{für } x > 0 \\ +1 - e^{+x/a} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

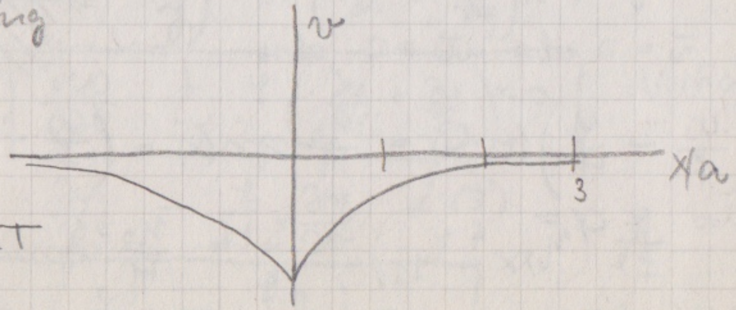
mit $a = c/|f|$ = Rossbyradius

$u = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}$ und $v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ aus Beweg.glg.

$$u = 0, \quad \boxed{v = -\frac{g\eta_0}{fa}\, e^{-|x|/a}}$$



stationäre!
Gleichgewichts-
lösung



N-S-JET

Ertel-Theorem

Pedlosky S. 39

Präambel: Vektor-Tensor-analysis

$$\frac{d}{dt}\nabla f = \frac{\partial}{\partial t}\nabla f + (\vec{u}\cdot\nabla)\nabla f$$

$$= \nabla \frac{\partial}{\partial t} f + \; ?$$

N.R.

$$\nabla\left((\vec{u}\cdot\nabla) f\right)$$
$$= \partial_i\left((u_j \partial_j) f\right)$$
$$= u_j \partial_j\, \partial_i f + (\partial_i u_j)\, \partial_j f$$
$$= (\vec{u}\cdot\nabla)\nabla f + \boxed{\underbrace{\nabla\vec{u}}_{\text{Tensor}} \cdot \nabla f}$$

Kartesisch, nur x-y-Komponenten und u-v

$$\partial_i (u_j \partial_j) f = \begin{pmatrix} \partial_x (u\partial_x + v\partial_y) f \\ \partial_y (u\partial_x + v\partial_y) f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u\partial_x + v\partial_y)\partial_x f \\ (u\partial_x + v\partial_y)\partial_y f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x u\, \partial_x f + \partial_x v\, \partial_y f \\ \partial_y u\, \partial_x f + \partial_y v\, \partial_y f \end{pmatrix}$$

$$= \quad -\text{"}- \quad + \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

$$= (u_j \partial_j)\, \partial_i f + (\partial_{\underset{\text{Zeile}}{i}}\, u_{\underset{\text{Spalte}}{j}})\, \partial_j f$$

also $\frac{d}{dt} \nabla \rho = \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\vec{u} \cdot \nabla) \rho - \nabla \vec{u} \cdot \nabla \rho$

$$= \nabla \frac{d\rho}{dt} - \nabla \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (1)$$

Potential Vorticity, Ertel's Theorem

Vorticity equation:

mit $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + \underbrace{2\vec{\Omega}}_{\text{Coriolis}}$ gilt

$$\frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = (\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{u} - \vec{\omega}_a (\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \vec{g}$$

conti: $\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ gibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{u} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \vec{g} \quad (2)$$

Sei λ ein Skalarfeld. Dann nach Präambel (1)

$$(*) \quad \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \lambda = \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla\right) \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \vec{u} \cdot \nabla \lambda$$

und nach (2) $\cdot \nabla \lambda$ von links:

$$(**) \quad \nabla \lambda \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\right) = \nabla \lambda \cdot \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{u} + \nabla \lambda \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \nabla \times \vec{g}$$

(*), (**) mit Produktregel

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda\right) = \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right) \frac{d\lambda}{dt} + \nabla \lambda \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \nabla \times \vec{g}$$

Annahmen: i) $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ empirisch, z.B. S (entropy) oder s (salinity)

ii) entweder $\rho = \rho(p)$, dann $\nabla \rho \times \nabla p = 0$

oder $\lambda = \lambda(\rho, p)$ z.B. Zustandsglg. $S = S(\rho, p)$

dann $\nabla \lambda = \alpha \nabla \rho + \beta \nabla p$ d.h.

$$\nabla \lambda \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) = 0$$

iii) gravity potential; friction negligible

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\Pi}{dt} = 0} \quad \text{Pedlosky S. 39}$$

mit potential vorticity $\boxed{\Pi = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla \lambda}$