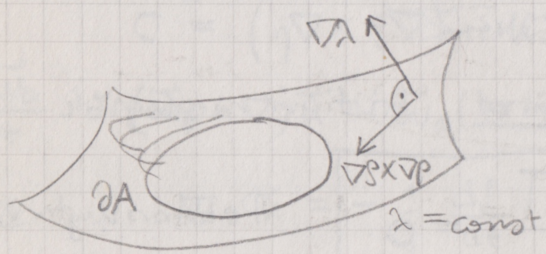
Ertel's theorem 2^{nd} derivation: Pedlovsky p. 40 f

Kelvin's circulation theorem (resp. Bjerknes) $(\nu = 0)$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{u} = \int_A \vec{da} \cdot \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2}$$

1) Trick: choose ∂A in surface of constant λ



SEI $\frac{d\lambda}{dt} = 0$!

λ = const along ∂A at $t=0$ & $\frac{d\lambda}{dt} = 0$

$\Longrightarrow$ λ = const along $\partial A(t)$ for all t:

$\boxed{\partial A \text{ remains in surface } \lambda = \text{const !}}$

2) Let $\lambda = \lambda(\rho, p)$ be thermodynamic function.

Then $\nabla\lambda = \alpha\nabla\rho + \beta\nabla p \perp \nabla\rho \times \nabla p$

d.h. $\nabla\rho \times \nabla p$ liegt in der Fläche λ = const !

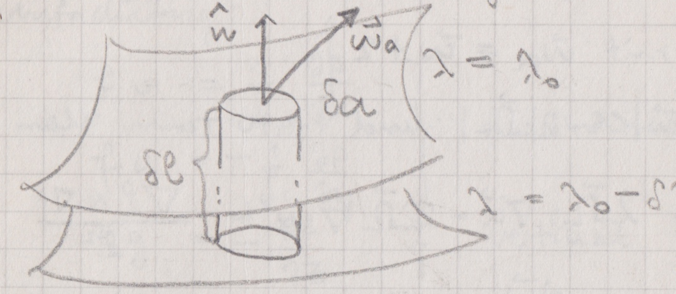
d.h. $\vec{da} \cdot (\nabla\rho \times \nabla p) = 0$,

d.h. $$\frac{d}{dt} \int_A \vec{da} \cdot \vec{\omega}_a = 0$$

3) Geometrie: make A infinitesimally small, $\vec{\delta a}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_a \cdot \vec{\delta a}\right) = 0$$

Also Ausdruck für $\vec{\delta a}$ gesucht



pillbox

$\delta l \, |\nabla\lambda| = \delta\lambda$ by definition of $\nabla\lambda$

mass content in pillbox: $\delta m = \rho \, \delta a \, \delta l$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_a \cdot \vec{\delta a}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_a \cdot \hat{n} \, \frac{\delta a \, \delta l \, \rho}{\delta l \, \rho}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \hat{n} \, |\nabla\lambda| \, \frac{\delta m}{\delta\lambda}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\delta m}{\delta\lambda}}_{\text{const}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\lambda\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\lambda\right) = 0}$$

Thus, if the λ-surfaces move apart and $\nabla\lambda$ becomes smaller, $\vec{\omega}_a$ must increase !

Vorticity equ., geostrophy, thermal wind

Pedlosky S. 42 – 56

Vorticity equ.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_a \cdot \nabla \vec{u} - \vec{\omega}_a \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \frac{\vec{F}}{\rho}$$

mit $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$

sei $|\vec{\omega}| \ll 2|\vec{\Omega}|$ und letzter Term klein:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{u} - 2\vec{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$$

Annahme: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$: ist klein, bleibt klein,

große Terme rechts kompensieren sich.

$$\boxed{2\vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{u} - 2\vec{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} = -\underbrace{\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}}_{\text{thermische Term}}}$$

Thermische Wind

Annahme: barotropic: $\nabla \rho \times \nabla p = 0$

incompressible: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$\rightarrow \boxed{\Omega \cdot \nabla \vec{u} = 0}$ Taylor-Proudman theorem

$\Omega = (0, 0, \Omega)$ und

mit $\vec{u} = (u, v, w)$ und $w = 0$ auf Randfläche

$\rightarrow \vec{u} = (u(x,y,t), v(x,y,t), 0)$ 2-D!

Taylor-columns (1923)

Zurück zur Impulsgleichung

geostrophe Näherung

$$2\vec{\Omega} \times \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi$$

Coriolis Druck gravity

Vereinfachung:

$$\left.\begin{aligned} f v &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ f u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{horizontal}$$

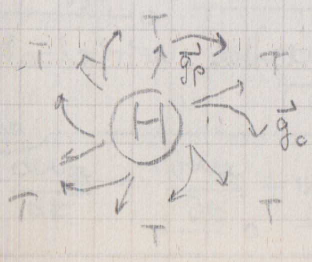
$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} \Big\} \text{vertikal}$$

entkoppelt

Teilchen bewegen sich entlang Isobaren, statt senkrecht dazu (∇p). Sind also „Kreisel", die sich senkrecht zur angewandten Kraft bewegen.

„Geostroph" heißt: aus $p(x, y, z)$ kann u, v, w berechnet werden (trivial).

Abweichungen von Geostrophie (wiederum) aus vorticity equation, also als $\vec{\omega}$-Effekte, vor allem mittels potential vorticity.



Nordhemisphäre:
H = Hochdruck
T = Tiefdruck

→ Hochdruckgebiete sind Antizyklone

Wiederholung: Ertel (1942) in „Naturwissenschaften"

genau wie Pedlosky:

Vorticity equation in der Näherung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec\omega}{\rho}\right) - \frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\vec u = \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}$$

sei $\rho=\rho(p,\lambda)$: $\qquad = \dfrac{\partial\rho}{\partial\lambda}\,\dfrac{\nabla\lambda\times\nabla p}{\rho^2} \;\Big|\cdot\nabla\lambda$

$$\rightarrow \nabla\lambda\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec\omega}{\rho}\right) - \frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\vec u\cdot\nabla\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + u_j\partial_j\lambda$$

$$\rightarrow \nabla\frac{d\lambda}{dt} = \partial_i\frac{d\lambda}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\partial_i\lambda + u_j\partial_j\partial_i\lambda} + (\partial_i u_j)\partial_j\lambda$$

$$= \frac{d}{dt}\,\partial_i\lambda \qquad + \quad \dots$$

$$= \frac{d}{dt}\,\nabla\lambda \qquad + \nabla\vec u\cdot\nabla\lambda$$

Produktregel in (1)

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\nabla\lambda\cdot\frac{\vec\omega}{\rho}\right) - \frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\nabla\lambda - \frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\vec u\cdot\nabla\lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla\lambda\cdot\frac{\vec\omega}{\rho}\right) - \frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\underbrace{\frac{d\lambda}{dt}}_{=0 \text{ by assumption}} + \cancel{\frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\vec u\cdot\nabla\lambda} - \cancel{\frac{\vec\omega}{\rho}\cdot\nabla\vec u\cdot\nabla\lambda}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\nabla\lambda\cdot\frac{\vec\omega}{\rho}\right) = 0}$$

Ertelscher Wirbelsatz

Potential vorticity & shallow water 9.3.22

Sect. 3.4 Pedlosky

Vorticity kartesisch

$$\omega_x = w_y - v_z \qquad w_y = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ usw.}$$

$$\omega_y = u_z - w_x$$

$$\omega_z = v_x - u_y$$

mit u & v unabh. von z

$$\omega_x = w_y$$

$$\omega_y = -w_x$$

$$\omega_z = v_x - u_y$$

Shallow water Euler equ. with Coriolis acc.

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -g h_x \quad \Big| -\partial_y$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -g h_y \quad \Big| \partial_x$$

gibt

$$\underbrace{-u_{ty}}_{0} - \underbrace{u_y u_x}_{5} - \underbrace{u u_{xy}}_{1} - \underbrace{v_y u_y}_{5} - \underbrace{v u_{yy}}_{2} + \underbrace{f v_y}_{3} = g h_{xy}$$

$$\underbrace{+v_{tx}}_{0} + \underbrace{u_x v_x}_{4} + \underbrace{u v_{xx}}_{1} + \underbrace{u_x v_y}_{4} + \underbrace{v v_{xy}}_{2} + \underbrace{f u_x}_{3} = -g h_{yx}$$

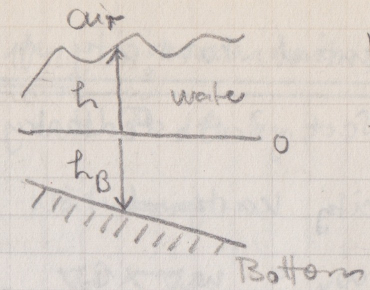
$$\underbrace{(v_x - u_y)_t}_{0} + \underbrace{u\,\partial_x(v_x - u_y)}_{1} + \underbrace{v\,\partial_y(v_x - u_y)}_{2}$$

$$= (\underbrace{-f}_{3} \underbrace{- v_x}_{4} \underbrace{+ u_y}_{5})\,\underbrace{(u_x + v_y)}_{345}$$

also

$$\circledast \quad \boxed{\frac{d\omega_z}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\omega_z}{\partial t}}_{0} + \underbrace{u\frac{\partial\omega_z}{\partial x}}_{1} + \underbrace{v\frac{\partial\omega_z}{\partial y}}_{2} = \underbrace{-(\omega_z + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{3,4,5}}$$

Kontinuitätsglg:



$H = h - h_B$

total water height

$$0 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH)$$

d.h. $\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

Schreibe damit (*) als

$$\boxed{\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\omega_z + f}{H}\frac{dH}{dt}}$$

d.h. für $dH/dt > 0$ d.h. Stretchung wächst ω_z

„Ballerinaeffekt"

Beachte: es gibt in shallow water nur vertikale Kolumnen, also keinen tilting-effekt

mit $df/dt = 0$ folgt

$$\frac{d(\omega_z + f)/dt}{\omega_z + f} = \frac{dH/dt}{H}$$

also mit NR:

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} \xrightarrow[\cdot fg]{} \frac{f'fg}{f} = \frac{g'fg}{g} \xrightarrow[:g^2]{} \frac{f'g - fg'}{g^2} = 0 = \left(\frac{f}{g}\right)'$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_z + f}{H}\right) = 0} \qquad \frac{\omega_z + f}{H} = \Pi$$

Ertel potential vorticity

erneut: $H\uparrow \rightarrow \omega_z\uparrow$

Weil $f \neq 0$ ist selbst für $\omega_z(t=0) = 0$ zu späteren Zeiten $\omega_z \neq 0$:

Erneute Herleitung in übernächster Seite

Selbst in wirbelloser aber rotierender Atmosphäre / Ozean wird vorticity erzeugt durch vertikales Stretching, also z.B. Absinken des Ozeanbodens

Anschluss an Ertels pot. vorticity

Wir brauchen dazu λ mit $d\lambda/dt = 0$.

Dies ist etwas trickreich: Pedlosky S. 62

Kontiglg. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

da $u = u(x,y,t)$ und $v = v(x,y,t)$ kann

z-Integration durchgeführt werden

$$w(x,y,z,t) = -z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + q(x,y,t)$$

Bestimme q durch untere Randbedingung

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{h_B} = w(x,y,h_B,t)$$

$$\cancel{\frac{\partial h_B}{\partial t}} + u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y} = -h_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + q$$

d.h. $q = u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y} + h_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

also $\boxed{w(x,y,z,t) = (h_B - z)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y}}$

verwende von linker Seite $\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

$$\frac{dz}{dt} = w(x,y,z,t) = \frac{z - h_B}{H}\frac{dH}{dt} + u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y}$$

d.h. $$\frac{z-h_B}{H}\frac{dH}{dt}-\frac{dz}{dt}+\frac{dh_B}{dt}=0$$

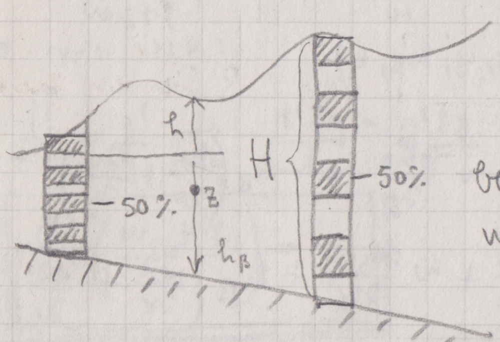
$$\frac{z-h_B}{H}\frac{dH}{dt}=\frac{d}{dt}(z-h_B)$$

$$\frac{dH/dt}{H}=\frac{d(z-h_B)/dt}{z-h_B}$$

Damit wie vorher

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{z-h_B}{H}\right)=0}$$

Tolle Aussage: da $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$ bewegt sich Flüssigkeit in <u>Säulen.</u> Die relative Position jedes Teilchens in der Säule bleibt erhalten, wenn die Säule vertikal gestreckt/gestaucht wird



bezogen auf Säulenhöhe vom Boden (0%) nach Decke (100%)

$$\boxed{\text{Relative Höhe ist Erhaltungsgröße}}$$

(für shallow water)

Nun zurück zu Ertel: verwende also

$$\boxed{\lambda=\frac{z-h_B}{H}}$$

Es ist $\frac{u}{w}\approx\frac{l}{h}\gg 1$ mit typischer Länge l, Höhe h für shallow water

also $\vec{\omega}=(w_y,\ -w_x,\ v_x-u_y)$
$$\approx(0,0,\omega_z)$$

also Ertels pot vorticity

$$\Pi=\frac{\vec{\omega_a}}{\rho}\cdot\nabla\lambda$$
$$=\frac{(f+\omega_z)}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-h_B}{H}\right)$$
$$=\frac{f+\omega_z}{\rho H}$$ und da $\rho\approx$ const

ist Ertels Theorem

$$\boxed{0=\frac{d\Pi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_z+f}{H}\right)}$$ wie 3 Seiten zuvor!

<u>Und nochmal anders</u> (Vallis S. 162)

Kelvin $\frac{dC}{dt}=0$ mit $C=\oint_{L=\partial A}d\vec{l}\cdot\vec{v}=\int_A d\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}$

also $\frac{d}{dt}(d\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})=0$. Speziell für shallow water

$\operatorname{rot}\vec{v}=(f+\omega_z)\hat{z}$ also $\frac{d}{dt}(da(f+\omega_z))=0$.

Kontiglg: Volumen $da\cdot H$ Flüssigkeitssäule konstant

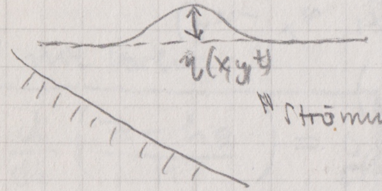
also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_z+f}{H}\right)=0}$$

Linearisierter shallow water flow   9.3.22

Theorem (Pedlosky S. 70)

Gegeben sei stationäre, linearisierte shallow water Strömung

$$\partial/\partial t \equiv 0, \quad \eta \ll H_0, \quad \dot{\vec{u}} \gg (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$$



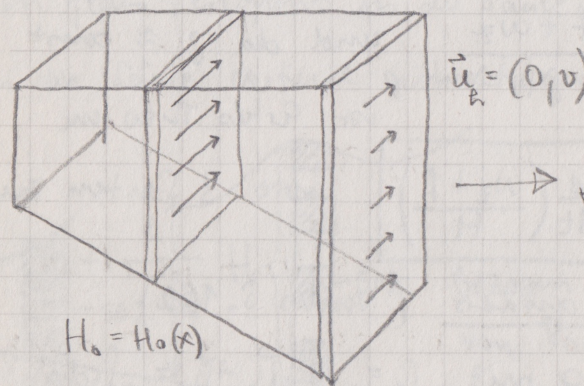
H_0 = Höhe ohne Strömung

$\vec{u}_h$ = Horizontalgeschw.

∇_h = horizontaler gradient

Dann ist $\boxed{\vec{u}_h \perp \nabla_h H_0}$

D.h. die Strömung ist entlang konstanter Wassertiefe



Beweis

1) indirekt aus Ertel-Theorem (Pedlo S. 70)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_z + f}{H}\right) = 0 \quad \text{wird mit } \frac{\partial}{\partial t} \equiv \overbrace{(\vec{u}_h\cdot\nabla_h)\omega_z}^{\text{quadratisch } u,v} = 0$$

$$\boxed{\vec{u}_h \cdot \nabla_h H_0 = 0}$$

2) direkt aus Hydrogleichungen (Pedlo S. 67–70)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \mathcal{E}_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \mathcal{E}_2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH_0) + \frac{\partial}{\partial y}(vH_0) = 0 \qquad \mathcal{E}$$

Sei $U = uH_0$

$V = vH_0$ Dann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - fV = -gH_0\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH_0\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{für } U, V, \eta & (3) \end{cases}$$

$(1)_x + (2)_y$ und $(2)_x - (1)_y$ geben

$$\dot{\overline{V_y + U_x}} - f(V_x - U_y) = -g\left[(H_0\eta_x)_x + (H_0\eta_y)_y\right] \qquad (4)$$

$$\dot{\overline{V_x - U_y}} + f(V_y + U_x) = -g\left[H_{0,x}\eta_y - H_{0,y}\eta_x\right] \qquad (5)$$

$(\dot{4})$ & (5) einsetzen:

$$\ddot{\overline{V_y + U_x}} + f^2(V_y + U_x) = -fg(H_{0x}\eta_y - H_{0y}\eta_x)$$

(3) einsetzen $(c_0^2 = gH_0)$ $\quad -g\dfrac{\partial}{\partial t}\left[(H_0\eta_x)_x + (H_0\eta_y)_y\right]$

$$\boxed{0 = \dddot{\eta} + f^2\dot{\eta} - \dot{\overline{(c_0^2\eta_x)_x}} - \dot{\overline{(c_0^2\eta_y)_y}} - fg(H_{0x}\eta_y - H_{0y}\eta_x)}$$

beachte $H_{0x}\eta_y - H_{0y}\eta_x = \begin{vmatrix} H_{0x} & \eta_x \\ H_{0y} & \eta_y \end{vmatrix}$ = Jacobean

stationäre Form der gerahmten Gleichung ist

$$H_{0x}\eta_y - H_{0y}\eta_x = 0$$

d.h.

$$\frac{H_{0x}}{H_{0y}} = \frac{\eta_x}{\eta_y}$$

nun ist für $\eta(x,y) = const$

$$d\eta = \eta_x\,dx + \eta_y\,dy = 0$$

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{dy}{dx}\Big|_{\eta = const}$$

ebenso für $H_0(x,y) = const$

$$\frac{H_x}{H_y} = -\frac{dy}{dx}\Big|_{H_0 = const}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}\Big|_{\eta} = \frac{dy}{dx}\Big|_{H_0}}$$

oder einfach: die Linien $y(x)$ mit $\eta = const$

und die Linien $y(x)$ mit $H_0 = const$

fallen zusammen

Es bleibt zu zeigen, dass $\vec{u}$ tangential ist, d.h.

$$\vec{u} = \frac{dy}{dx}\Big|_{\eta} = \frac{dy}{dx}\Big|_{H_0}$$

Dazu zurück zu Grundgleichungen

$$\dot{u} - fv = -g\eta_x$$
$$\dot{v} + fu = -g\eta_y$$

gibt

$$\ddot{u} + f^2 u = -g\dot{\eta}_x - fg\eta_y$$
$$\ddot{v} + f^2 v = -g\dot{\eta}_y + fg\eta_x$$

Stationär:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{g}{f}\eta_y \\ v &= +\frac{g}{f}\eta_x \end{aligned}\right\}\ \text{ist wieder geostrophe Näherung}$$

also

$$\boxed{u\eta_x + v\eta_y = 0}$$

oder $\vec{u}_h \nabla_h \eta = 0$

d.h. | $\vec{u}_h$ tangential an Conturlinien von η / Höhenlinien |

Bemerkung

Die Wasserlinien $\eta = const$ und die Strömungsvektoren $\vec{u}$ zeigen also direkt die Linien $H_0 = const$ des Meeresbodens.

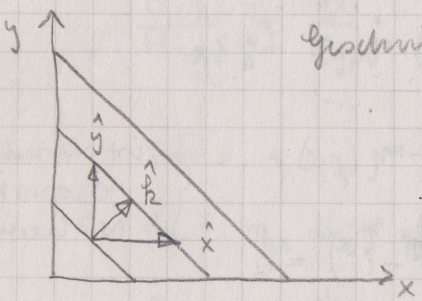
Die starke Aussage des Theorems beruht auf folgenden Faktoren: 1) shallow flow, 2) stationarity, 3) linearity (i.e. $u^2 \equiv 0$ etc.), 4) presence of Coriolis term

WELLEN MIT CORIOLISBESCHL. 9.3.22

weiterhin shallow water Strömung (u,v) und $w \ll u,v$

Phase $e^{i(kx+ly-\sigma t)}$ (1)

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+l^2}}$ ist die Geschwindigkeit konstanter Phase



In der gleichen Zeit Δt legt ebene Welle in $\hat{k}$-Richtung Strecke Δs zurück, in $\hat{x}$- und $\hat{y}$-Richtung aber $\sqrt{2}\,\Delta s$, also Phasengeschw.

$$c_x = c_y = \sqrt{2}\, c$$

Absurd? müsste ja sein

$$c_x = c_y = c/\sqrt{2}$$

Sagt nur, dass Phasengeschwindigkeit keine v von Teilchen sind, sondern RATEN

→ keine ...

Wellengleichung ist

$$\dddot{\eta} + f^2 \dot{\eta} - \dot{\overline{(c_0^2 \eta_x)_x}} - \dot{\overline{(c_0^2 \eta_y)_y}} - fg\left(H_{0x}\eta_y - H_{0y}\eta_x\right) = 0$$

sei H_0 konstant: flacher Meeresboden:

$$\dddot{\eta} + f^2 \dot{\eta} - c_0^2\, \dot{\overline{\eta_{xx} + \eta_{yy}}} = 0$$

Kann einmal integriert werden

$$\boxed{\ddot{\eta} + f^2 \eta - c_0^2 \Delta\eta = 0} = \text{const}$$

(1) einsetzen:

$$-\sigma^2 + f^2 - c_0^2(-k^2 - l^2) = 0$$

d.h. $\sigma = \sqrt{c_0^2(k^2+l^2) + f^2}$ $(\pm)$ POINCARÉ Wellen

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+l^2}} = \sqrt{c_0^2 + \frac{f^2}{k^2+l^2}}$$

Corioliswellen sind immer schneller als gewöhnliche Wasserwellen. Benutze ⊕ von vorletzter Seite:

$$\ddot{u} + f^2 u = -g\dot{\eta}_x - fg\eta_y$$

$$\ddot{v} + f^2 v = -g\dot{\eta}_y + fg\eta_x$$

10.3.22

gibt

$$(\sigma^2 - f^2)\, u_0 = (gk\sigma + ifgl)\, \eta_0$$

$$(\sigma^2 - f^2)\, v_0 = (gl\sigma - ifgk)\, \eta_0$$

für $\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$

$u = u_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$, ebenso v

ungewöhnlich: Summe reelle & imaginäre Zahl

Trick klar: multipliziere mit $(k,l)\cdot$ und $(l,-k)\cdot$ [Vektor]

um nur reell oder imag. zu behalten.

Bedeutung auch klar:

$$u_{\parallel} = (k,l)\cdot(u,v)\,/\,\sqrt{k^2+l^2}$$

$$u_{\perp} = (l,-k)\cdot(u,v)\,/\,\sqrt{k^2+l^2}$$

Benutze

$$\sigma^2 - f^2 = c_0^2 K^2 \qquad (K^2 = k^2+l^2)$$

Somit

$$u_{\parallel} = \frac{g K^2 \sigma}{K(\sigma^2-f^2)}\,\eta_0\, e^{i\ldots}$$

$$= \frac{g\sigma}{c_0^2 K}\,\eta_0\, e^{i\ldots}$$

$$\underset{(\sigma/K=c)}{=} \frac{c}{H_0}\,\eta_0\, e^{i\ldots} \xrightarrow{Re} \frac{c\eta_0}{H_0}\cos(kx+ly-\sigma t)$$

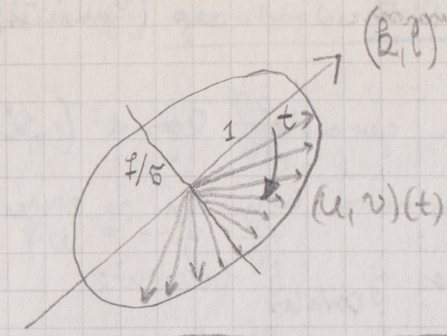
$$u_{\perp} = \frac{i f g K^2}{K(\sigma^2-f^2)}\,\eta_0\, e^{i\ldots}$$

$$= \frac{if}{H_0}\,\frac{1}{K}\,\eta_0\, e^{i\ldots}$$

Wahl $(l,-k)$ statt $(-l,k)$

$$= \frac{if}{H_0}\,\frac{c}{\sigma}\,\eta_0\, e^{i\ldots} \xrightarrow{Re} -\frac{c\eta_0}{H_0}\,\frac{f}{\sigma}\sin(kx+ly-\sigma t)$$

Also $\boxed{u_{\parallel}^2 + \frac{\sigma^2}{f^2}u_{\perp}^2 = \frac{\eta_0^2}{H_0^2}c^2}$ Ellipsengleichung!



Achtung: die Phase läuft dabei vorwärts in (k,l)-Richt. Nicht gezeichnet

$(f/\sigma < 1)$

$\boxed{\text{POINCARÉ - Welle}}$

Bemerkung: diese Wellen sind <u>nicht</u> geostroph wegen $f/\sigma < 1$, sondern breiten sich im wesentlichen in Richtung von ∇p aus (und nicht $\perp$ dazu).

Die Vortizität einer Poincaréwelle ist

$$\boxed{\omega_z = \frac{f\eta}{H_0}} \qquad \text{(Rechnung Pedlo S. 74)}$$

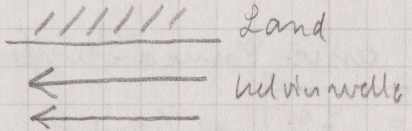
Kinematik der Poincaréwellen ist komplex. Mehr später.

Ausweg: betrachte Poincaréwellen in geraden Kanälen. Führt auf Eigenwertproblem (Ränder!) mit diskreten Frequenzen σ. Keine cross channel Geschwindigkeit.

Der bemerkenswerteste Modus, den man hierbei findet, ist die „entartete" Kelvinwelle (interesting cancellations)

<u>KELVINWELLE</u> (Gill S. 372) 10.3.22

- Erfordert einen geraden Rand („Land")
- $g_{coriolis} \sim v$. Es wird hier ein v erzeugt, das ein sehr spezielles $g_{coriolis}$ bewirkt:
- Kelvinwelle ist in perfekter geostropher Balance, obwohl Poincaréwellen es i.a. nicht sind.
- geostroph: Strömung entlang Isobaren
- Auf der Nordhalbkugel Kelvinwelle nur so, dass Landmasse in Strömungsrichtung RECHTS



Für
- Gezeiten im Pazifik sind Kelvinwellen ein wesentliches Element. Nordatlantik ist zu schmal, dass er als schmaler Kanal betrachtet werden kann:

keine Rotationseffekte in narrow channels

Wiederholung: <u>geostrophe Näherung</u> (+ baro Schicht.)

$$\left.\begin{aligned} fv &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}\right\}$$ Pedlosky S. 49 (2.8.21a-c)

Vergleich: <u>Seichtwasserwellengl.</u>

$$\dot u - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\dot v + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\dot \eta + H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$ für $H_0 = \text{const}$

Aus $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ folgt $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial \eta}{\partial x}$ (ebenso y)

Annahme: $\boxed{v = 0}$,

$$\left.\begin{aligned} \dot u &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dot \eta + H_0\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ 2 dynam. Glgen für η und u

6 Seiten zurück bei ⊕

$$\leftarrow fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$ geostrophic constraint (keine Zeitabl.)

Die ersten beiden Glgen geben wieder

$$0 = \ddot{u} + g\,\dot{\eta}_x$$
$$= \ddot{u} - \underbrace{g H_0}_{= c_0^2}\, u_{xx} \qquad \text{freie Wellenglg.}$$

$$0 = \ddot{\eta} + H_0\, \ddot{u}_x$$
$$= \ddot{\eta} - g H_0\, \eta_{xx} \qquad \text{—''—}$$

Lösungen: $\eta = F(x+ct, y) + G(x-ct, y)$

$$\sqrt{\frac{H_0}{g}}\; u = -F(x+ct, y) + G(x-ct, y)$$

Einsetzen in constraint $fu = -g\,\frac{\partial\eta}{\partial y}$ gibt

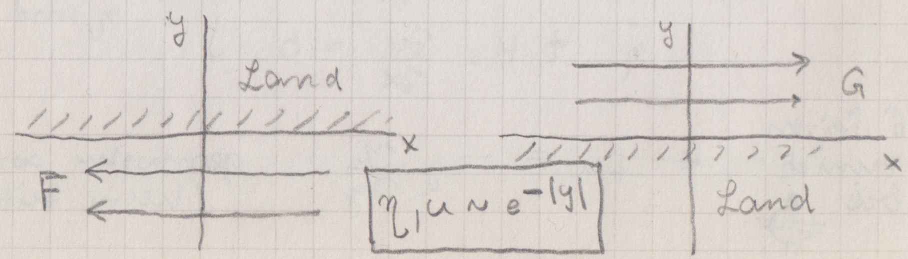
$$-f\,\frac{1}{\sqrt{H_0 g}}\, F = -dF/dy$$
$$f\,\frac{1}{\sqrt{H_0 g}}\, G = -dG/dy$$

(Gill S. 378)

also

$$\frac{dF}{F} = \frac{f}{c_0}\,dy\,, \qquad \frac{dG}{G} = -\frac{f}{c_0}\,dy$$

exponentieller Zerfall für $y<0$ — '' — für $y>0$



Die Corioliskraft fu in y-Richtung aufgrund von $u\hat{x}$ (für den Fall G) wird kompensiert durch die Druckkraft $-g\,\frac{\partial\eta}{\partial y}$ in +y-Richtung.

Skala des exponentiellen Abfalls:

$$\boxed{R = c_0/f} \qquad \text{Rossbyradius}$$

hängt nicht von Strömung ab.

Pedlosky: Kelvinwelle ist die $(n=0)$ – Mode des diskreten Spektrums fehlende von Poincaré-wellen in einem Kanal (Eigenwertproblem)

$R \approx 2000$ km im tiefen Ozean
≈ 200 km an Küsten

Kelvinwelle

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= e^{-y/R}\, \tilde{G}(x-ct) \\ u &= \sqrt{\frac{g}{H}}\, e^{-y/R}\, \tilde{G}(x-ct) \end{aligned}}$$

POINCARÉ WELLEN IN GERADEN KANÄLEN

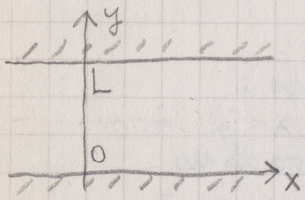
Pedlosky S. 75 ff

Annahmen also: 1) shallow water flow

2) Linearisierung usw

3) Rotation

4) Ränder



4) führt zu einem diskreten Eigenwertproblem

Wir beginnen mit (siehe 7 Seiten zurück)

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad \ddot u + f^2 u = -g\,\dot\eta_x - fg\,\eta_y \\ &(2) \quad \ddot v + f^2 v = -g\,\dot\eta_y + fg\,\eta_x \\ &(3) \quad \ddot\eta + f^2\eta - c_0^2\Delta\eta = \mathrm{const}_t \end{aligned}}$$

! $H_0 = \mathrm{const}$

Randbedingung $v|_{y=0} = v|_{y=L} = 0$ d.h. aus (2)

(4) $\boxed{\dot\eta_y - f\eta_x = 0 \,, \quad y = 0, L}$

einfachste Ansatz $\eta = \mathrm{Re}\;\bar\eta(y)\, e^{i(kx-\sigma t)}$ in (3) + (4) gibt

$$(3') \quad \frac{d^2\bar\eta}{dy^2} + \left(\frac{\sigma^2-f^2}{c_0^2} - k^2\right)\bar\eta = 0 \qquad \text{mit } \mathrm{const}_t \to 0$$

$$(4') \quad \frac{d\bar\eta}{dy} + f\frac{k}{\sigma}\bar\eta = 0 \,, \quad y = 0, L$$

Lösung von (3') ist

$$\bar\eta = A\sin\alpha y + B\cos\alpha y$$

mit $\alpha^2 = \frac{\sigma^2-f^2}{c_0^2} - k^2$

Dies in (4) gibt

$(y=0)$ $\quad \alpha A + \frac{fk}{\sigma}B = 0$

$(y=L)$ $\quad \left(\alpha\cos\alpha L + \frac{fk}{\sigma}\sin\alpha L\right)A + \left(-\alpha\sin\alpha L + \frac{fk}{\sigma}\cos\alpha L\right)B = 0$

Sind 2 Gleichungen für A, B. Eliminiere $B = -\frac{\sigma\alpha}{fk}A \neq 0$

Sei $\mathcal{C} = \cos\alpha L$ und $\mathcal{S} = \sin\alpha L$. Dann $(A \neq 0)$

$$\alpha\mathcal{C} + \frac{fk}{\sigma}\mathcal{S} + \left(-\alpha\mathcal{S} + \frac{fk}{\sigma}\mathcal{C}\right)\left(\frac{-\alpha\sigma}{fk}\right) = 0$$

$$\cancel{\alpha\mathcal{C}} + \frac{fk}{\sigma}\mathcal{S} + \frac{\alpha^2\sigma}{fk}\mathcal{S} - \cancel{\alpha\mathcal{C}} = 0$$

$$\left(f^2k^2 + \alpha^2\sigma^2\right)\mathcal{S} = 0$$

$$\left(f^2k^2 + \left(\frac{\sigma^2-f^2}{c_0^2} - k^2\right)\sigma^2\right)\mathcal{S} = 0$$

$$\left(f^2k^2c_0^2 - \sigma^2k^2c_0^2 + (\sigma^2-f^2)\sigma^2\right)\mathcal{S} = 0$$

$$\boxed{(\sigma^2-f^2)(\sigma^2-c_0^2k^2)\sin\alpha L = 0}$$ Eigenwertgleichung

Jede der 3 Faktoren kann 0 werden!

1. Fall Poincaréwelle $\boxed{\sin\alpha L = 0}$ d.h. $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$

d.h. $\alpha^2 = \frac{\sigma^2-f^2}{c_0^2} - k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ also

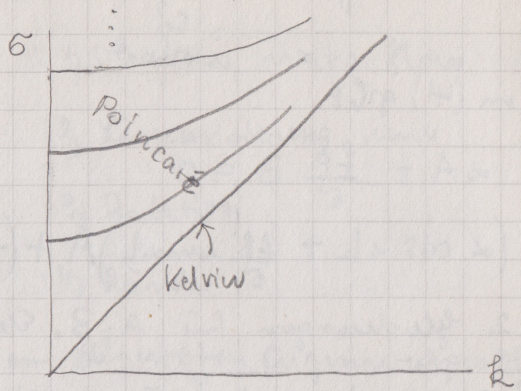
$$\boxed{\sigma = \sigma_n = \left[f^2 + c_0^2\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\right]^{1/2}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

vgl. $\sigma = \left[f^2 + c_0^2\left(k^2 + l^2\right)\right]^{1/2}$ für 2-D Poincaré-wellen

2. Fall $\boxed{\sigma = c_0 k}$ Kelvinwelle

Coriolisterm f fällt raus, da y-Richtung geostroph

Spektrum



Zur Kelvinwelle aus jetziger allgemeiner Herleitung

$$\alpha^2 = \frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - k^2 = -\frac{f^2}{c_0^2} \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\alpha = i\frac{f}{c_0}}$$

rein imaginär, d.h.

$\bar{\eta}(y) = A \sin \alpha y + B \cos \alpha y$ gibt expon. Abfall

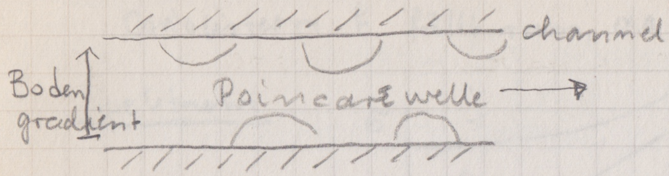
bzw direkte: $\frac{d^2\bar{\eta}}{dy^2} - \frac{f^2}{c_0^2}\bar{\eta} = 0$ hat Lsg e^{-y} !

Übung: zeige $v = 0$ für diesen Fall

3. Fall $\sigma = \pm f$ ist spurious / unphysikalisch

ROSSBY - WELLE

11.3.22



$$H(y) = H_0 - sy \qquad \text{, slope } s$$

$$\left(\text{Pedlo}: \; s_{\text{hier}} = \frac{D_0}{L} s_{\text{Pedlo}}\right)$$

Ansatz wieder $\eta = \operatorname{Re} \bar\eta(y)\, e^{i(kx-\sigma t)}$

Wellengleichung für η war (viele Seiten zurück)

$$\dddot\eta + f^2\dot\eta - \dot{\overline{(c_0^2\eta_x)_x}} - \dot{\overline{(c_0^2\eta_y)_y}} - fg\left(H_x\dot\eta_y - H_y\dot\eta_x\right) = 0$$

NR $\quad \dot{\overline{(c_0^2\eta_x)_x}} = \dot{\overline{(gH\eta_x)_x}} = \dot{\overline{g\cancel{H_x}\eta_x + gH\eta_{xx}}} = gH\dot\eta_{xx}$

$\quad \dot{\overline{(c_0^2\eta_y)_y}} = \dots = \dot{\overline{gH_y\eta_y + gH\eta_{yy}}} = gH\dot\eta_{yy} + gH_y\dot\eta_y$

Damit

$$\operatorname{Re}\Big[\big(\underset{\dddot\eta}{i\sigma^3} - \underset{f^2\dot\eta}{i\sigma f^2} - \underset{gH\dot\eta_{xx}}{i\sigma gHk^2}\big)\bar\eta + \underset{gH\dot\eta_{yy}}{i\sigma gH\bar\eta''} - \underset{gH_y\dot\eta_y}{i\sigma gs\bar\eta'} - \overset{fgH_y\eta_x}{ifgsk\bar\eta}\Big]\, e^{i(kx-\sigma t)} = 0$$

$$\left(\sigma(\sigma^2 - f^2 - gHk^2) - fgsk\right)\bar\eta - gs\sigma\bar\eta' + gH\sigma\bar\eta'' = 0$$

$$\frac{H}{H_0}\bar\eta'' - \frac{s}{H_0}\bar\eta' + \left[\frac{\sigma^2 - f^2 - gHk^2}{gH_0} - \frac{fsk}{H_0\sigma}\right]\bar\eta = 0$$

$$\boxed{\left(1 - \frac{sy}{H_0}\right)\bar\eta'' - \frac{s}{H_0}\bar\eta' + \left[\frac{\sigma^2 - f^2}{gH_0} - k^2\left(1 - \frac{sy}{H_0}\right) - \frac{fs}{H_0\sigma}k\right]\bar\eta = 0}$$

ist Glg (3.10.3) S. 81 in Pedlosky

H kommt in Eulergleichung und Wellengleichung für u, v nicht vor, Randbedingung $v = 0$ bei $y = 0, L$ bleibt also wie zuvor:

$$\dot\eta_y - f\eta_x = 0 \qquad y = 0, L \qquad \text{d.h.}$$

$$\boxed{\bar\eta_y + \frac{fk}{\sigma}\bar\eta = 0} \qquad y = 0, L$$

Näherung (willkürlich): $1 - \frac{sy}{H_0} \approx 1$ $\Big\}$ Zwitter

aber nimm $\frac{s}{H_0}$ dennoch mit!

$$\boxed{\bar\eta'' - \frac{s}{H_0}\bar\eta' + \left[\frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{fs}{H_0\sigma}k\right]\bar\eta = 0}$$

Lösungsansatz

$$\bar\eta = \overbrace{e^{sy/2H_0}}^{\exp}\Big(\overbrace{A\sin\alpha y}^{\mathcal{S}} + \overbrace{B\cos\alpha y}^{\mathcal{C}}\Big)$$

$(ab)'' = a'' + 2a'b' + b''$

einsetzen:
$$\frac{s^2}{4H_0^2}(A\mathcal{S} + B\mathcal{C})\exp$$
$$+ \cancel{\frac{s\alpha}{H_0}}(A\mathcal{C} - B\mathcal{S})\exp$$
$$- \alpha^2(A\mathcal{S} + B\mathcal{C})\exp$$
$$- \frac{s}{H_0}\frac{s}{2H_0}(A\mathcal{S} + B\mathcal{C})\exp$$
$$- \cancel{\frac{s\alpha}{H_0}}(A\mathcal{C} - B\mathcal{S})\exp$$
$$+ \left[\frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{fs}{H_0\sigma}k\right](A\mathcal{S} + B\mathcal{C})\exp = 0$$

heben sich

d.h. $$\alpha^2 = \frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - \left(k^2 + \frac{s^2}{4H_0^2}\right) - \frac{fs}{H_0\sigma}k \qquad \text{(3.10.7) in Pedlo}$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Lösungsansatz für $\bar\eta$ in RB $y=0,L$ einsetzen:

für y beliebig: $\frac{s}{2H_0}\bar\eta + \alpha(A\xi - B\zeta)\exp + \frac{fk}{\sigma}\bar\eta = 0$

$y=0$: $\frac{s}{2H_0}B + \alpha A + \frac{fk}{\sigma}B = 0$

also $\alpha A + \left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right)B = 0$ (I)

$y=L$: $0 = A\sin\alpha L\left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right)$

$+ A\cancel{\cos\alpha L}\cdot\alpha$

$- B\sin\alpha L\cdot\alpha$

$+ B\cos\alpha L\left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right) \overset{(I)}{=} -\alpha\cancel{A\cos\alpha L}$

d.h. wieder nur $\sin\alpha L$ übrig, wie zuvor:

$$0 = -\sin\alpha L\left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right)^2\frac{B}{\alpha} - B\alpha\sin\alpha L$$

d.h. $\left(\alpha^2 + \left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right)^2\right)\sin\alpha L = 0$

α^2 von oben einsetzen

$$\left[\frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - \left(k^2 + \frac{s^2}{4H_0^2}\right) - \frac{fs}{H_0\sigma}k + \left(\frac{s}{2H_0} + \frac{fk}{\sigma}\right)^2\right]\sin\alpha L = 0$$

$$\left[\sigma^2 - f^2 - k^2c_0^2 - \cancel{\frac{s^2g^2}{4}} - \cancel{\frac{fskg^2H_0}{\sigma}} + \cancel{\frac{s^2g^2}{4}} + \cancel{\frac{2sfkg^2H_0}{2\sigma}} + \frac{f^2k^2c_0^2}{\sigma^2}\right]\sin\alpha L = 0$$

$$\left[\sigma^2(\sigma^2 - f^2) - \sigma^2k^2c_0^2 + f^2k^2c_0^2\right]\sin\alpha L = 0$$

$$\boxed{(\sigma^2 - f^2)(\sigma^2 - k^2c_0^2)\sin\alpha L = 0} \qquad (3.10.8)$$

S. 82 Pedlo

genau wie für $H = H_0 = \text{const}$ zuvor!

Poincarewellen für $\sin\alpha L = 0$ d.h. $\alpha L = n\pi$, d.h.

$$\circledast \quad \boxed{\sigma^2 - \frac{fskc_0^2}{H_0}\frac{1}{\sigma} - c_0^2\left[k^2 + \frac{f^2}{c_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right] = 0}$$

dabei wurde Term $s^2g^2/4$ als klein (s!) weggelassen

$\circledast$ ist Glg. 3. Ordnung in σ.

Näherungsweise erhält man 2 Lsg Zweige

mit $s=0$, also wieder Poincarewellen,

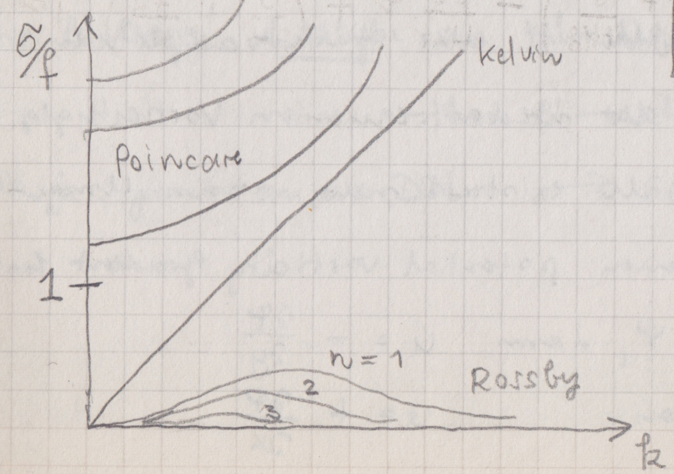
$$\sigma^2 = f^2 + c_0^2\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)$$

Die neue dritte Wurzel hat $1/\sigma$ als wichtigen Term, also ist σ klein und also σ^2 vernachlässigbar:

topographic Rossby wave

$$\boxed{\sigma = -s\frac{f}{H_0}\frac{k}{k^2 + f^2/c_0^2 + n^2\pi^2/L^2}}$$

niederfrequent! da $s \to 0$



$\boxed{\sigma_{Rossby} < f}$

Periode der Rossbywelle ist größer als Rotationsperiode, daher „topographisch"

Remarkable: $\sigma_{Rossby} < 0$ d.h. $\eta \sim e^{i(kx+|\sigma|t)}$

Lsg:

$$\eta = \eta_0 \sin\frac{n\pi y}{L} \cos(kx+|\sigma|t) + \sigma(\varepsilon)$$

$$u = -\eta_0 \frac{gn\pi}{fL} \cos\frac{n\pi y}{L} \cos(kx+|\sigma|t) + \sigma(\varepsilon)$$

$$v = -\eta_0 \frac{g}{f} k \sin\frac{n\pi y}{L} \sin(kx+|\sigma|t) + \sigma(\varepsilon)$$

Somit

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\ v &= \frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial x}\end{aligned}\right\} \text{geostroph, obwohl Welle, weil niederfrequent}$$

Geschwindigkeitsfelder bleiben dynamisch näherungsweise in geostropher Balance mit Druckkräften.

Hieraus ergibt sich große Thema der

→ quasigeostrophen Strömungen. ←

Zentrales Ergebnis (viel Rechnerei):

1) | Rossbywelle ist eine finite-amplitude Lösung der niederfrequenten Vorticitygl. |

2) | Rossbywelle existiert nur, wenn Umgebung einen potential vorticity Gradient hat |

Idee: $\frac{g}{f}\eta = \Psi$, dann $u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}$

Streamfunktion Ψ $\quad v = +\frac{\partial\Psi}{\partial x}$

Dispersionsrelation für 2-D Rossbywellen

$$\sigma = -\frac{k\,\partial\eta/\partial y - l\,\partial\eta/\partial x}{k^2+l^2+F}$$ (Pedlosky 3.15.4 S. 99)

mit algebraischen Termen F und $\vec{k} = (k, l)$

Rossbys Originalarbeit

Er betrachtet nicht linearen Bodengradienten

$$H(y) = H_0 - sy$$

sondern Variation der Corioliskraft mit geograph. Breite

$$f(y) = f_0 + \beta_0 y \qquad f_0 = 2\Omega \sin\theta_0, \quad \beta_0 = 2\Omega/r_0 \cdot \cos\theta_0$$

Potential vorticity

$$\Pi = \frac{\omega_z + f}{H}$$: ist egal, ob H abnimmt oder f zunimmt

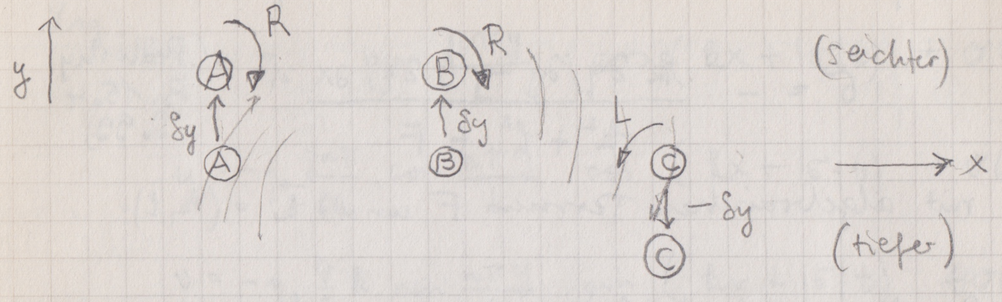
Schlampiges Argument in Pedlosky S. 107:

Die bisherige Analyse von H'-Wellen gilt auch für f'-Wellen

Na ja: ganz andere DGL ... → Chapter 6

Mechanismus der Rossbywelle

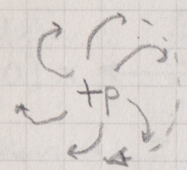
Pedlosky S. 103



- Betrachte 3 Flüssigkeitssäulen A, B, C bei gleichem y, d.h. gleicher Wasserhöhe (im Bild von oben gesehen)
- B wird um $+\delta y$ verrückt (Störung)
- B gelangt in seichteres Wasser. Dadurch wird (Continuity)
  - α — Grundfläche von B verbreitert
  - β — Wasserhöhe in B steigt
- Wegen α verringert sich positive ↺ vorticity von B: Ballerinaeffekt
- d.h. für $f > 0$ (Nordhalbkugel):
  B bekommt Rechtsdrall, im Uhrzeigersinn (R)

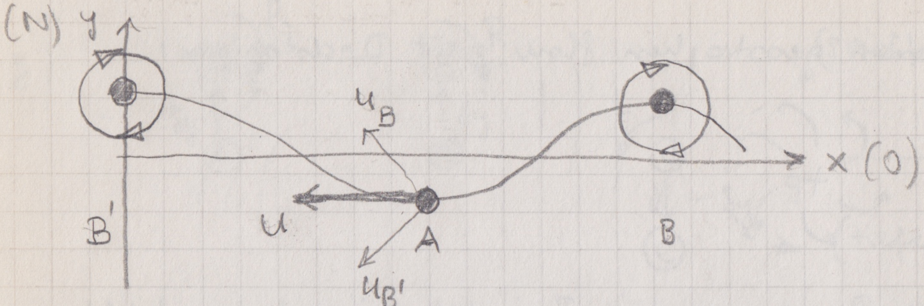
(— ambient pot. vort. wächst, $\frac{f}{H} \to \frac{f}{H-dH}$, aber gesamte ist erhalten: $\frac{f+\omega}{H} \to \frac{f+\omega-d\omega}{H-dH+dq}$)

- Auch wegen β verringert sich positive vorticity ↺ von B: Der erhöhte Wasserdruck bei B durch erhöhten Wasserspiegel bewirkt auf Nordhemisphäre einen geostrophen flow mit Rechtssinn:



- Die Bewegung um B im Uhrzeigersinn schiebt Säule C nach unten ($-\delta y$), Säule A nach oben ($+\delta y$)
- C entwickelt counterclock (L), A clockwise circulation (R)
- Sowohl A wie C induzieren bei B ein $\bar{u}$, das B zurückschiebt in Originalposition
- also negativer feedback $\delta y \curvearrowright -\delta y$, d.h. Welle
- genauer: B wird aufgrund Trägheit (keine Welle ohne Trägheitskraft) über Ruheposition hinausschießen, d.h. $-\delta y$, also Zyklus $\delta y \curvearrowright -\delta y \curvearrowright \delta y \curvearrowright -\delta y$
- Für kurze Abstände A−B−C, also kleine λ, sind die Grundflächen (querdings) von A, B, C klein und ebenso die induzierten vorticityänderungen: $\sigma \to 0$
- Für große Abstände A−B−C sind die Zirkulationsänderungen klein, der Effekt verschwindet wieder, $\sigma \to 0$

Mechanismus Rossbywelle Vallis S. 229/230



Potential vorticity $\sim \boxed{\zeta + \beta y}$

Also für $\delta y > 0$: $\delta\zeta < 0$ wg P.V. conservation:

Strömung im Uhrzeigersinn für $\delta y > 0$

Wirbel bei B und B' induzieren bei A

Bewegung nach links, $u < 0$, westward

= Rossbywelle

(Kein vertikales displacement, $v = 0$,

d.h. sinusoidale Störung behält Form)

„Potential vorticity anomaly produces velocity field that displaces fluid parcels."

Für die Rechnung mit P.V. siehe 6 Seiten weiter vorn.

Undated / Preparation 15.3.22

Kelvin – Bjerknes – Ertel Theorem Vallis, S. 151

Kelvin: $$\frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{v} = -\oint_L \frac{dp}{\rho}$$

Bjerknes: $$-\oint_L \frac{dp}{\rho} = -\oint_L d\vec{l}\cdot\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} -\int_S d\vec{a}\cdot\nabla\times\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\overset{\text{V.I}}{=} \int_S \underbrace{d\vec{a}\cdot(\nabla\rho^{-1}\times\nabla p)}_{\text{Bjerkness tubes}}$$

Ertel: $$dU = dQ - p\,dV, \quad dQ = T\,dS$$

pro Masse: $$p\,d\rho^{-1} = T\,dS - dU$$

also $$\rho^{-1}dp = d\left(\frac{p}{\rho}\right) - p\,d\rho^{-1} = -T\,dS + dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

also $$\frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{v} = \oint_L\left\{T\,dS - dU - d\left(\frac{p}{\rho}\right)\right\} = \oint_L T\,dS \overset{!}{=} 0 \quad \text{wenn } S = \text{const on } L$$

Lege L also in eine Fläche (!) mit S = const.

Dies reicht nicht. Denn $L = L(t)$, braucht also $S(t)$ = const in $L(t)$, L ist material loop, also $\boxed{\frac{dS}{dt} = 0}$

Circulation in rotierenden Systemen

15.3.22
S. 152 in Vallis

$$\frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{v} \qquad \vec{v} = \vec{v}_{\text{inertia}}$$

$$= \frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot(\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r}) \qquad \text{Eulerformel}$$

$$= \oint_L d\vec{l}\cdot\left[\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_r\right) + (\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot d\vec{v}_r\right]$$

mit $\oint d\vec{v}_r\cdot\vec{v}_r = 0$

und p. I.
$$\oint d\vec{v}_r\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \oint d(\vec{v}_r\cdot\vec{\Omega}\times\vec{r}) - \oint\vec{v}_r\cdot d(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$
$$= -\oint\vec{v}_r\cdot(\vec{\Omega}\times d\vec{r})$$
$$= \oint d\vec{r}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r)$$

$(d\vec{r} = d\vec{l})$
↓
$$= \oint_L d\vec{l}\cdot\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r\right)$$

$$\stackrel{\text{Euler}}{=} \oint_L d\vec{l}\cdot\left(-\frac{dp}{\rho} - \nabla\Phi\right) = 0 \quad \text{wenn } p = p(\rho)$$

also, was man auch einfach hätte voraussehen können

$$0 = \frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\oint_L d\vec{l}\cdot(\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r})$$
$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \boxed{\frac{d}{dt}\int_S d\vec{a}\cdot(\vec{\omega}_r + 2\vec{\Omega}) = 0} \quad \boxed{p = p(\rho)}$$

mit $\vec{\omega}_r = \nabla\times\vec{v}_r$ = relative vorticity

und (Übung!) $\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\Omega}$

Vorticity-Eq. in rotating frame

15.3.22
Vallis S. 153

Eulergleichung im rotierenden System ($\vec{u} \equiv \vec{v}_r$)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi$$

gab vor vielen Seiten (Kasten rechts)

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega})\cdot\nabla\vec{u} - (2\Omega + \vec{\omega})\,\nabla\cdot\vec{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}$$

Führe ein $\boxed{\vec{\omega}_a = 2\vec{\Omega} + \vec{\omega}}$ mit $\vec{\Omega}$ = const

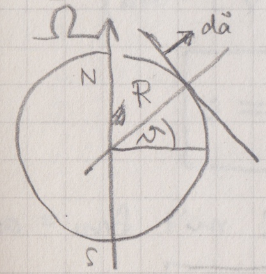
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\right) = \frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\vec{u} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}}$$

Beta-Effekt

Vallis S. 154

$$\frac{d}{dt}\int_S d\vec{a}\cdot(\vec{\omega}_r + 2\vec{\Omega}) = 0 \quad \text{wenn } p = p(\rho)$$

also $\frac{d}{dt}\left(d\vec{a}\cdot(\vec{\omega}_r + 2\vec{\Omega})\right) = 0$ für infinit. S



sei $d\vec{a}\cdot\vec{\omega}_r = \zeta\, da$: lokal vertikale vorticity-component

$\vec{\Omega}\cdot d\vec{a} = \Omega\, da\sin\vartheta$, also

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{2\Omega}{da}\frac{d}{dt}(da\sin\vartheta)$$

wegen Incompressibility $d/dt\; da = 0$ d.h.

$$\frac{d\zeta}{dt} = -2\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta = -\beta v_\vartheta$$
$$\beta = \frac{2\Omega}{R}\cos\vartheta$$

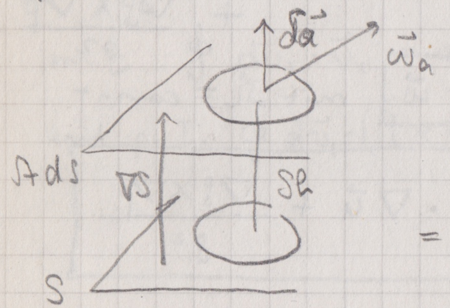
Vorticity-Verlust Richtung Nordpol

P. V. after Vallis   15.03.22

S.157/158 etwas knapp; war vorher schon hier

Bjerknes: $\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{a}\cdot\vec{\omega}_a\right) = 0$

für Fläche in der $S = \text{const}$ (siehe vor 3 Seiten)



$$0 = \frac{d}{dt}\left(\delta\vec{a}\cdot\vec{\omega}_a\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\delta a \;\hat{n}\cdot\vec{\omega}_a\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\delta a \;\frac{\nabla S}{|\nabla S|}\cdot\vec{\omega}_a\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\delta a\,\delta h \;\frac{\nabla S}{|\nabla S|\,\delta h}\cdot\vec{\omega}_a\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta V}{\delta S}\;\nabla S\cdot\vec{\omega}_a\right)$$
$$= \frac{\delta V}{\delta S}\;\frac{d}{dt}\left(\nabla S\cdot\vec{\omega}_a\right)$$

δV = Volumen Flüssigkeitsteilchen = const wenn incompressibel

δS = const by assumption

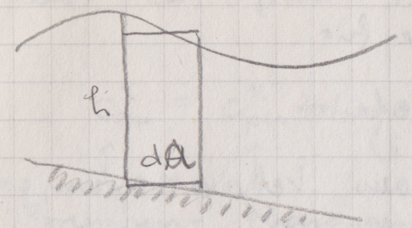
d.h. $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\nabla S\cdot\vec{\omega}_a\right) = 0}$$

wenn compressible: $\delta V = \delta m/\rho$ mit $\delta m = \text{const}$

also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\nabla S\cdot\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\right) = 0}$$

mit $\left|\,\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}\,\right|$

P.V. for shallow water   Vallis S.162



$\vec{\omega}_a = (0, 0, \zeta+f)$

$d\vec{A} = da\,\hat{z}$, $f = 2\vec{\Omega}\cdot\hat{z}$

also Bjerknes für alle Flächen, in denen $S = \text{const}$:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(d\vec{a}\cdot\vec{\omega}_a\right) = \frac{d}{dt}\left(da\,(\zeta+f)\right)$$

Hier (in Vallis nicht erwähnt) $d\vec{a} = da\,\hat{z}$ gewählt

denn für ~~polytrope~~ isentrope Flüssigkeit liegen in jeder horizontalen Fläche der „Taylorcolumns" = Flüssigkeitsteilchen mit konstantem $\delta S/\delta m$.

Für $\rho = \text{const}$ (Wasser) also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{h}\right) = 0}$$

P.V. für shallow water; Rossby 1936

mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$

Rossbywellen für β-Effekt

15.3.22
Vallis S. 226 ff

Vor einigen Seiten wurde für vertikale vorticity ζ hergeleitet

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v$$ aus Kelvintheorem, $p = p(\rho)$

Kurze Alternativherleitung aus P.V. (shallow water):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{h}\right) = 0$$ mit $f = f_0 + \beta y$, $h = \text{const}$,

$$\frac{d\zeta}{dt} + v\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dt} + \beta v = 0$$ wie oben

Betrachte Störung (u,v) einer zonalen Strömung $(U,0)$, mit $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$

dann $\zeta = v_x - u_y = \Delta\psi$, also

$$\boxed{\Delta\dot{\psi} + U\Delta\psi_x + \beta\psi_x = 0}$$

Glg (6.57) S. 228 Vallis
vgl. (3.18.4) S. 108 in Pedlosky

wobei $u\psi$, $v\psi$ also ψ^2 weggelassen wurde: lineare Näherung

ebene Welle: $\psi \sim e^{i(kx+ly-\sigma t)}$ gibt

$$-(k^2+l^2)(-i\sigma + iUk) + i\beta k = 0$$

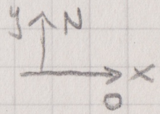
$$\boxed{\sigma = Uk - \frac{\beta k}{k^2+l^2}}$$

Dispersionsrelation Rossbywellen (barotrop!)

Uk ist nur kinematisch: auch ohne Welle läuft Hintergrund mit U. Kurze Rechnung:

$$c_{gr}^x = c_{ph}^x + \frac{2\beta k^2}{(k^2+l^2)^2}$$

Gruppen- Phasengeschw. in x-Richtung

Phase $c_{ph}^x \overset{Uk}{=} -\frac{\beta}{k^2+l^2}$ weg  von Ost nach $\frac{\text{West}}{\text{Ost}}$

Wenn z.B. $c_{ph}^x = 0$ kann Gruppe von West nach