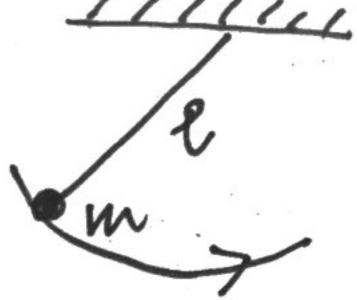
Lagrange I. Art

1) Zwänge, Nebenbedingungen

constrain



$$x^2+y^2=l^2 \xrightarrow{\text{schreibe}} x^2+y^2-l^2=0 = g(x,y)$$

$$z=0$$

Implizites Funktionen Theorem

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = 0$$

definiert $y(x)$ WENN $\det\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right| \neq 0$

z.B. $F(x,y) = x^2+y^2-l^2$

$\rightarrow y(x) = \sqrt{l^2-x^2}$

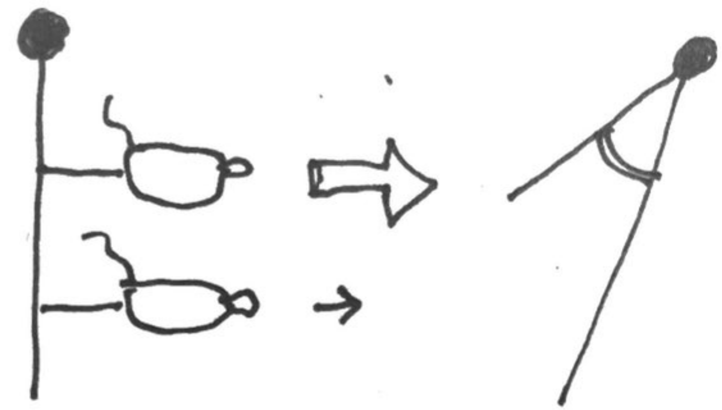
Im folgenden viele Zwänge

$g_j(q_1,\dots,q_n) = 0$ holonom = geometrisch

Orte

$g_j(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)=0$ nicht holonom = kinematisch u.a.a.

2)



PdvA

Kraft !
$\equiv$
Zwang !

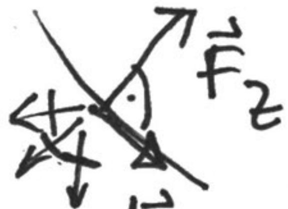
Lagrange-Multiplikator

$$\vec{F}_Z = \lambda \nabla g$$

denn $g = \text{const} = 0$

& $\vec{F}_Z$ steht $\perp$
also $\nabla \ldots$

$$\vec{dr} \cdot \vec{F}_Z = 0$$



geschrieben also

$$\vec{\delta r} \cdot \vec{F}_Z = 0$$

$\vec{dr}$ entlang der Bahn heißt $\vec{\delta r}$

virtuelle Verrückung
↑
warum dieses Wort?

3) <u>Geniale Verallg</u>

PdvA: Zwangskräfte leisten keine Arbeit !

Denn Z.K. ist Führungskraft.

genauer:

Die <u>Summe</u> aller von Zwangs-

kräften geleistete Arbeit $= 0$

Heute: $\text{PdvA} \overset{\text{s. Goldstein}}{=} \text{PdkW}$ (Hamilton)   Euler-Lagrange

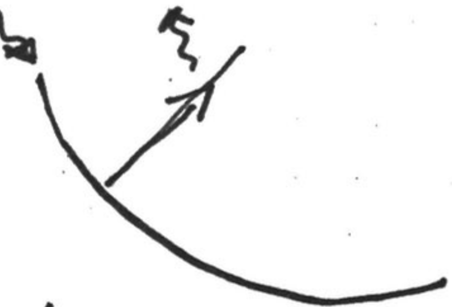
$\downarrow$ Verdünnung $\vee$

$\vec{F} = m\vec{a}$ Newton

4) PdvA math. Form.

$$m\ddot{\vec r} = \vec F + \vec F_Z$$

$$\underbrace{\left(m\ddot{\vec r} - \vec F\right)\cdot\delta\vec r}_{\vec F_Z \text{ ist weg!}} = \vec F_Z \cdot \delta\vec r = 0$$



wenn δq_i unabh., dann folgt aus PdvA eben Newton II

$$m_i \ddot q_i = F_i \quad \forall i$$

für n Freiheitsgrade

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \ddot q_i - F_i\right)\delta q_i = 0}$$

PdvA

denn diese $\sum_{i=1}^{n}$ ist $\sum_{i=1}^{n} F_{Z_i}\delta q_i = 0$

λ_i lin unabh. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta q_i = 0$

$\longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$

5) δq_i <u>nicht</u> lin unabh

d.h. q_i nicht <u>unabh.</u>

Sei gegeben System mit n Koordinaten

$q_1, \ldots, q_n$ und $m \leq n$ Zwängen

$\Rightarrow$ $n - m$ Freiheitsgrade

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

m Zwänge $\rightsquigarrow$ löse sie halt auf

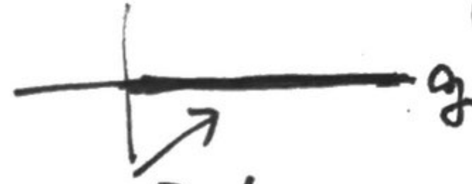
$\ldots$ $x_3 = x_{17}^2 + \sin x_{16}$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i$$

effektiv $n-m$ Glg

real n Gln

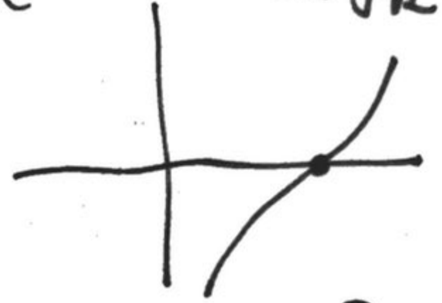
6) Lösung ohne Auflösen



Lagrange ~~λ~~ $g_k = 0$ auf ganzer Bahn

also $\delta g_k = 0$ (d.h. $dg_k = 0$)

[Achtung



also $0 = \delta g_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \delta x_i$ $\Big\}$ sind m 0er für $k = 1, \dots, m$

$\uparrow$ v.V. $\longleftarrow$ v.V. $\downarrow$

Lag: $0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \delta x_i$ $\Big\}$ ist eine 0

WOZU ?

damit in ~~der~~ PdvA

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i\right) \delta x_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i$$

$= 0$

kann man durch Wahl der λ_k erreichen, dass jede Klammer $(F_i - \dots)$ $= 0$ ist à la Newton & ~~Gl.~~ Lag II ? JA!