Lagrange $\quad q, \ \dot{q}, \ \mathcal{L}(q, \dot{q})$

Hamilton $\quad q, \ p, \ \mathcal{H}(q, p)$

Beweis. Es ist $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ $\quad (*)$

(Legendretrafo)

α) $p_i \underset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \underset{(*)}{=} p_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}$

also hängt $\mathcal{H}$ nicht von $\dot{q}_i$ ab

β) $d\mathcal{H} = d(p_i \dot{q}_i - \mathcal{L})$ $\quad$ Summen-konvent.

$= \dot{q}_i dp_i + \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \mathcal{L}_{q_i} dq_i - \cancel{\underbrace{\mathcal{L}_{\dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i}$

$= \dot{q}_i dp_i - \mathcal{L}_{q_i} dq_i + 0$

$\equiv \mathcal{H}_{p_i} dp_i + \mathcal{H}_{q_i} dq_i + \mathcal{H}_{\dot{q}_i} d\dot{q}_i$

$\rightarrow \mathcal{H}_{\dot{q}_i} \equiv 0$

$\mathcal{H}_{q_i} = -\mathcal{L}_{q_i}$

$\boxed{\dot{q}_i = \mathcal{H}_{p_i}}$ $\quad$ Legendre

ist Übersetzung Lag → Ham.

Jetzt Physik

$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

$\boxed{\dot{p}_i = - \mathcal{H}_{q_i}}$ $\quad$ N II, E-L

2n Gleichungen 1. Ordnung

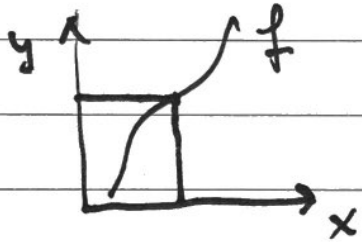
E-L	$\mathcal{H}$
$\cancel{\dot{p}_i} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$	$\dot{q}_i = \partial \mathcal{H} / \partial p_i$
$\dot{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial q_i$	$\dot{p}_i = - \partial \mathcal{H} / \partial q_i$

Legendretrafo, was wollte $\mathcal{L}$?

$$g(f') = f(x) - x f'(x)$$

Gegeben sei $f(x)$. Mache daraus $g(f')$

$$\mathcal{F}[x] \to \mathcal{G}[f']$$



<u>Beispiele</u>

Oszill. $(m=k=1)$ $\quad \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q},$$

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$$

$$= \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p \qquad \checkmark$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -q$$

d.h. $\dot{(\dot{q})} = \ddot{q} = -q$

<u>Wirkungs-Winkel-Variable</u>

Liouville & Arnold
(1840) (1963)

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

oder alles mit $x = (p, q)$

Satz von Liouville (1)

Zur Lösung $q_1(t), \dots, q_n(t)$
$p_1(t), \dots, p_n(t)$
eines mechan. Problems reicht die Angabe von n Bewegungskonstanten = Integrale der Bewegung

Diese müssen nicht die Orte $q_1, \dots, q_n$ sein (dann wäre der Satz trivial)

W-W-V Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(J)$

$\uparrow$ Wirkungsvariabl.

und sei φ die Winkelvariable

~~Dann ist~~ Mache $p, q \to \overset{\text{Hamilton}}{\widetilde{J, \varphi}}$

so dass $\mathcal{H}(p,q) = \mathcal{K}(J)$

oder \rm $H(p,q) = K(J)$

$J = K(J)$

z. B. $\frac{1}{2}(p^2 + q^2) = J$

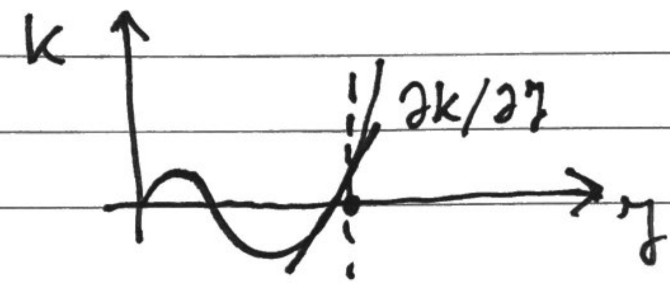
$\quad H(p,q)$

Sei $K = K(J)$

Beweis $\dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$\dot{\varphi} = + \frac{\partial K}{\partial J} = \text{const} = \omega$

denn $\dot{J} = 0$ d.h. $J = \text{const}$



also $\dot{J} = 0 \to J = \text{const}$

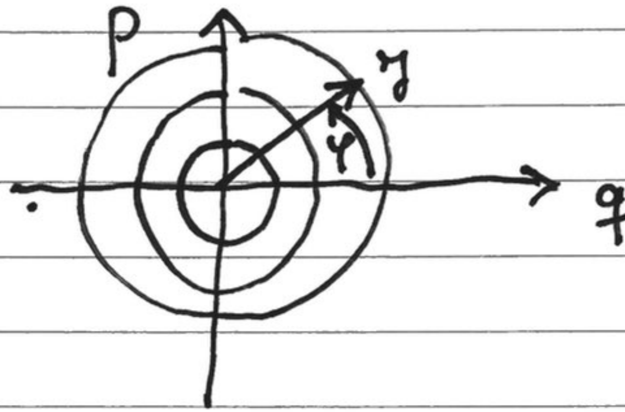
$\dot{\varphi} = \omega = \text{const} \to \varphi = \omega t + \varphi_0$

Lsg der Mechanik („$\vec{r}(t)$“) in Ham form. mit Wirk-Winkel: WENN DU

$$H(p,q) \longrightarrow K(J)$$

schaffst, DANN fertig, denn

$$J = \text{const}$$
$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$



übersetze $p,q \to J,\varphi$

Mach das mit jedem Paar

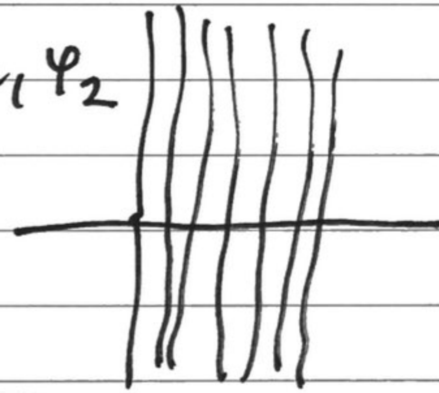
$p_1, q_1 \to J_1, \varphi_1$

$\vdots$

$p_n, q_n \to J_n, \varphi_2$

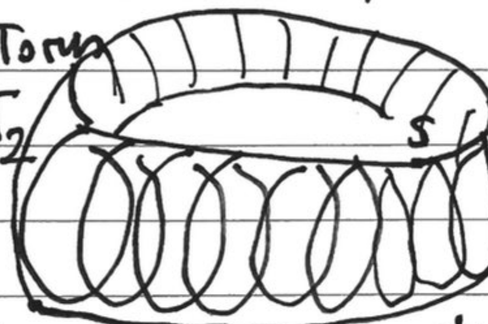
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$



Kreis × Kreis = Torus

$S_1 \times S_1 = T_2$



Torus = doughnout donut

$\underbrace{S_1 \times \ldots \times S_1}_{n} = T_n$