Poisson-Klammer

- Algebraisierung
- gewöhnl. Dgl. Phasenraum

Seien f & g Fkt $f(p,q)$ & $g(p,q)$

Def
$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Eigenschaften

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$
$$\{f,\lambda g\} = \lambda \{f,g\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\{f,g+h\} = \{f,g\} + \{f,h\}$$

Def $D_f\, g = \{f,g\}$

Differentialoperator

Diff.Op. i) wirkt auf Fkt

ii) Linearität

$$D_f(\alpha g + \beta h) = \alpha D_f g + \beta D_f h$$

iii) $D_f(g\,h) = (D_f g)\,h + g\,D_f h$

denn: $D_f(gh)$
$$= \{f, gh\}$$
(selbst) $\overset{!}{=} \{f,g\}h + g\{f,h\}$
$$= (D_f g)h + g\,D_f h$$

Jacobi-Identität

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

Nachweis: Rechnen

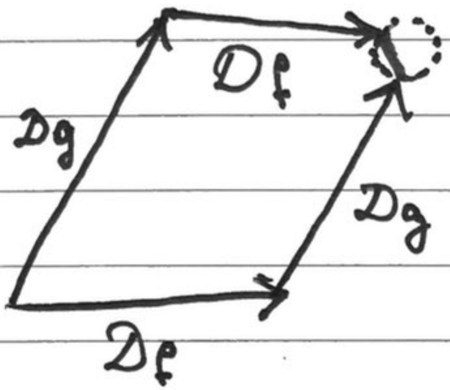
statt D_f

Satz $[D_f, D_g] \overset{\mathrm{Def}}{=} D_f D_g - D_g D_f$

ist Diff. Operator 1. Ordnung

Kommutator z. B. Heisenberg-K

Was dahinter steckt



Beweis Stelle Jacobi-Id. um

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

$$\rightarrow \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} = \{\{f,g\},h\}$$

$$D_f(D_g h) - D_g(D_f h) = D_{\{f,g\}} h$$

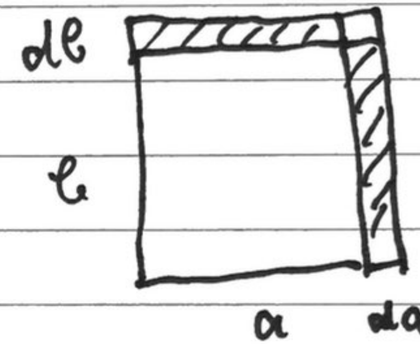
$$\boxed{[D_f, D_g] = D_{\{f,g\}}}$$

Lie-Algebra-Homomorphismus

Homom: $\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}f \cdot \mathcal{H}g$

vgl.

Leibniz Produkt $(fg)' = f'g'$?



$d(ab)$
$= \cancel{?}$
$a\,db + b\,da$
(Newton)

Physik von $\{f,g\}$

nehme $f = p_i$, $g = q_j$

$$\{p_i,q_j\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\,\delta_{jk} - 0 \cdot 0$$

alle and. 0 $= \delta_{ij}$ echt!

Also $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$

$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$

Satz

Seien α_i, β_j 2n Koordinaten

Wenn gilt

$$\{\alpha_i, \beta_j\} = \delta_{ij} \quad ⊛$$

dann gelten für α_i, β_i

Hamiltongl. für

$$\mathcal{H}(p(\alpha,\beta), q(\alpha,\beta)) = K(\alpha,\beta)$$

Beweis

puh! (α_i, β_i sind wegen ⊛ gerade symplekt. Koord. → Hamilton) :

blabla...

⊛ heißt: $\alpha_i \beta_i$ sind in Involution, formen damit Phasenraum-Koordinatennetz

alternativ mit erzeugenden Funktionen: **Satz**

WENN

$$\sum \underset{\text{Imp}}{\alpha_i}\, d\underset{\text{Ort}}{\beta_i} = \sum p_i\, dq_i + \underbrace{d\Phi(p,q)}_{\text{Pfaffsche Form}}$$

DANN

$\alpha_i \beta_i$ = Impulse, Orte

Beweis:

zeige, dass $\{\alpha_i, \beta_j\} = \delta_{ij}$

Hamiltongl. mit Poisson

bisher	jetzt
$\dot q_i = \partial H/\partial p_i$	$\dot q_i = \{H, q_i\}$
$\dot p_i = -\partial H/\partial q_i$	$\dot p_i = \{H, p_i\}$

entkoppelt — weg