Tensorinvarianten

Spur (trace) $\left(A_{ij}\right) = A$

$$sp(A) = \sum_i A_{ii}$$

ist Summe der Diagonalargumente
ist invariant unter Drehungen!

$$\det A_{dia} = A_{ii} =$$

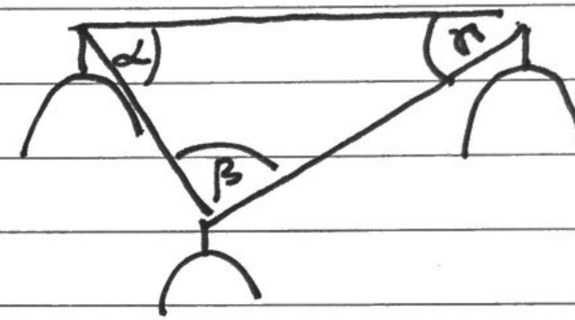
$$\det\left(T^{-1} A \cdot T\right)$$

$$\det T^{-1} \ \det A \ \cancel{\det} T$$

$$\cancel{\frac{1}{\det T}}$$

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

$$0 = a_{ij} X_i X_j$$



Gauß

Riemann

$$\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$G_{\mu\beta} = R_{\mu i i \beta} - \overset{?}{\tfrac{1}{2}} g_{\mu\beta}$$

$$\left(R_{\mu}{}^{\beta}{}_{\beta\gamma}\right) + \Lambda \, \delta_{\mu\beta}$$

$$w_i = \sum_{jk} \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\substack{\text{rang} \\ 3}} u_j v_k$$

$$\varepsilon_{iij} \overset{?}{=} 0$$

was sind Tensoren?

$$\underbrace{\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{s}}_{T}$$

was ist $(\vec{r} \otimes \vec{r}) \otimes (\vec{s} \otimes \vec{s})$

kein Tensor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ ist kartesische Darstellung eines Tensors

$$\underbrace{\vec{r}}_{\text{algebr. Objekt}} = \underbrace{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}_{\text{Darstellung}}$$

Tensor ist aber $\vec{r}$

B.M. weil $\vec{r}$ wartet

weil ist Rang 1 – Tensor

$\longrightarrow \vec{r} = (x_i)$

$$\underbrace{G_{ijkl}}_{\text{rang } 4} \quad \underbrace{A_{ij}}_{2} \quad \underbrace{r_i}_{1} \quad \underbrace{\sqrt{2} \quad 7 \quad \pi}_{\text{rang } 0}$$

Einstein: alle Glgen der Physik sind Tensorglgen

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Galilei $\quad$ "$\vec{F}'$" = "m" '$\vec{a}$''

$$A \cancel{B} \vec{u} = \vec{c}$$
$$(A\vec{u})' = c'$$

alle Beobachter sind gleich

bei Drehung Λ

macht Vektor $\vec{u}' = \Lambda \vec{u}$

Tensor $A' = \Lambda A \Lambda^{-1}$

$$A' \vec{u}' = (\Lambda A \cancel{\Lambda^{-1}})(\cancel{\Lambda} \vec{u}) = \Lambda \vec{c}$$

$\longrightarrow A\vec{u} = \vec{c}$

sei $\vec{r} = (x, y, z)$
$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

$$E_r = \frac{1}{2}\int dV \rho \left[\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int dV \rho \left[(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x^2+y^2+z^2) - (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)\cdot\int dV \rho \left[(x^2+y^2+z^2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}xx & xy & xz\\ yx & yy & yz\\ zx & zy & zz\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

wenn man benutzt

$$(ax+by+cz)^2 = (a, b, c)\cdot\begin{pmatrix}xx & xy & xz\\ yx & yy & yz\\ zx & zy & zz\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$$T_{ij} = \int dV \rho \left[x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j\right]$$

$$T = \int dV \rho \left[\vec{r}^{\,2}\,\mathbb{1} - \vec{r}\otimes\vec{r}\right]$$

Tensor — kartesische Darstellung

Drehimpuls

$$\vec{L} = \int dV \rho\, \vec{r}\times\vec{v}$$

$$= \int dV \rho\, \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\underset{\text{Laplace}}{=} \int dV \rho \left[r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}\right]$$

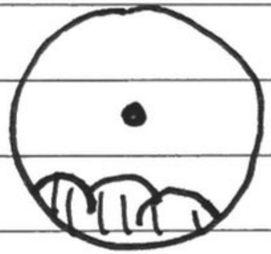
$$= \int dV \rho \left[r^2\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right] \quad 13$$

$$\underset{\text{Tensor}}{=} \int dV \rho \left[r^2\vec{\omega} - (\vec{r}|\vec{r})\cdot\vec{\omega}\right]$$

$$= \int dV \rho \left[r^2\mathbb{1} - \vec{r}|\vec{r}\right]\cdot\vec{\omega}$$

$$(a_i x_i)^2 = (a_i x_i)(x_j a_j) = a_i (x_i x_j) a_j$$

$\hat{L} \nparallel \hat{\omega}$ Unwucht



Vektor 1 = lineare Abbildung (Vektor 2)

$x \xrightarrow[f]{} y$ Funktion $V \to V$

$\vec{u} \xrightarrow[\text{l.A.}]{} \vec{v}$ Tensoren

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "F"'] \arrow[d] & g \arrow[d] \\ x \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd}$$

Funktional Fkt → Fkt

Operator

→ Tensor ist lineare Abb. von VR auf VR (Rang 2)

$\vec{u} \mid \vec{v}$

$\vec{r} : \mathbb{R} \to V = \mathbb{R}^3$

$\alpha \mapsto \alpha \vec{r}$

$\vec{r} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{r} \mapsto \alpha \vec{r}$

<u>Transformationsverhalten v. Tensoren</u>

„Tensor ist, was sich wie Tensor transformiert"

Sei A ein „Drehoperator"

„Drehmatrix", $A^T = A^{-1}$

$\vec{u}' = A\vec{u} = A \cdot \vec{u} = A(\vec{u})$

$\vec{v}' = A\vec{v}$

$\vec{u}' = A\vec{u}$

$\vec{u}'^{T} \cdot \vec{u}' = (A \cdot \vec{u})^{T} \cdot (A \cdot \vec{u})$

$\stackrel{!}{=} (\vec{u}^{T} \cdot A^{T}) \cdot (A \cdot \vec{u})$

$\stackrel{!}{=} \vec{u}^{T} \cdot (A^{T} \cdot A) \cdot \vec{u}$

$\stackrel{!}{=} \vec{u}^{T} \cdot \vec{u} \quad \to \quad A^{T} \cdot A = \mathbb{1}$

$\to \quad A^{T} = A^{-1}$

$\vec{u}'^{T} \cdot T' \cdot \vec{v}' \stackrel{!}{=} \vec{u}^{T} \cdot T \cdot \vec{v}$

↑

Tensor

$= (A\vec{u})^{T}\, T' (A\vec{v})$

$= \vec{u}^{T} A^{T} T' A \vec{v}$

$= \vec{u}^{T}\, T \cdot \vec{v}$

$T = A^{T} T' A$

$ATA^{-1} = \underbrace{AA^{-1}}_{\mathbb{1}}\, T' \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{\mathbb{1}}$

$T' = ATA^{-1}$

$\boxed{T' = ATA^{T}}$

$\boxed{\vec{u}' = A\vec{u}}$

kartesisch:

$T'_{il} = A_{ij} T_{jk} (A^{T})_{kl}$

$= A_{ij} (A^{T})_{kl} T_{jk}$

$T'_{il} = A_{ij} A_{lk} T_{jk}$

$T'_{ij} = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$

kartesische Tensordarstellung und -trafo

rang 0: Zahlen $a' = a$

rang 1: Vektor $v'_i = A_{ij} v_j$

rang 2: „Tensor" $T'_{ij} = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$

$\vdots$

rang 5: $T'_{ijklm} = A_{in} A_{jo} A_{kp} A_{lq} A_{mr} T_{nopqr}$

$$T'_{ijklm} = A_{in} A_{jo} A_{kp} A_{lq} A_{mr} T_{nopqr}$$