Tensorprodukt $\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u} | \vec{v} = \vec{u}\vec{v}$

EU AF UK/US

mit Darstellung $(u_i v_j)$

Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$

$\cdot \; : \; VR \longrightarrow \mathbb{R}$

$\otimes \; : \; VR \times VR \longrightarrow \cancel{} \mathbb{R}$

$VR \longrightarrow VR$

$(\vec{d}, \vec{c}) \overset{\vec{d}\cdot}{\longmapsto} (\vec{a} | \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{d}\vec{a})(\vec{b}\vec{c})$

was ist Tensor?

$\rightarrow (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

ist dyad. Produkt

→ Tensor ist multilineare Abb.

$T(\vec{u}, \vec{v}) = a \in \mathbb{R}$

$T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') = \alpha T(\vec{u}) + \beta T(\vec{u}')$

und ebenso für $\vec{v}$

(11)

→ Tensor ist lin. Abb. $VR \to VR$

$$T(\vec{u}) = \vec{v}$$
$$T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') = \ldots$$

→ Tensor ist was sich wie Tensor transformiert, nämlich

$$\dashrightarrow \quad T' = A T A^T$$
$$\dashrightarrow \quad T'_{ij} = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$$

→ Basis des Dyadenraums ist

$$\left.\begin{matrix} \hat{i}|\hat{i}, & \hat{i}|\hat{j}, & \hat{i}|\hat{k}, \\ \hat{j}|\hat{i}, & \hat{j}|\hat{j}, & \hat{j}|\hat{k}, \\ \hat{k}|\hat{i}, & \hat{k}|\hat{j}, & \hat{k}|\hat{k} \end{matrix}\right\}$$ schreibe allgemein $\vec{e}_i|\vec{e}_j$

damit jede Matrix $A = \sum_{i,j} a_{ij}\, \vec{e}_i|\vec{e}_j$

$$\hat{i}|\hat{i} =$$

$$(1,0,0)|(1,0,0) \quad \begin{matrix} (1,0,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}|(1,0,0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\hat{i}|\hat{j} =$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}|(0,1,0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{j}|\hat{i} =$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}|(1,0,0) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Drehungen: orthogonale Matrizen $A^T = A^{-1}$

Transform.verhalten

$a' = (A^0)\, a$ Skalar Tensor 0. Stufe | Rang 0

$u_i' = A_{ij}\, u_j$ Vektor —"— 1. Stufe | —"— 1

$T_{ij}' = A_{ik}\, A_{jl}\, T_{kl}$ "Tensor" —"— 2. Stufe | —"— 2

$\hat{=}$ Matrix Tabelle

Skalarprodukt ist Spur von Rang-2-Tensor

$T_{ij} = u_i v_j \rightsquigarrow \cancel{u_i v_j}\ u_i v_i = \text{Spur}\, T_{ij}$

$$\begin{pmatrix}1&7&3\\4&5&6\\7&9&2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \dots + 2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

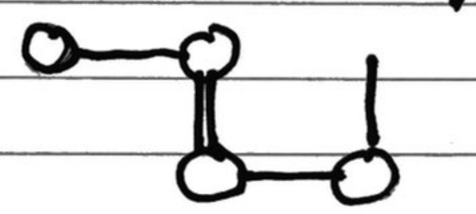
spannt auf

Abstrakter: $\vec{e}_i$ mit $i = 1, \dots, n$ ist Basis von VR dim n

$\vec{e}_i \,|\, \vec{e}_j$ mit $i, j = 1, \dots, n$

Basis von VR mit dim $n \cdot n$

$\vec{e}_i \,|\, \vec{e}_j \,|\, \vec{e}_k$ ... Dim n^3

Dynkin-Diagramm für Darstellung einer Gruppe „"

z. B. Trägheitstensor

$$\vec{r}|\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})|(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= xx\,\hat{i}|\hat{i} + xy\,\hat{i}|\hat{j} + xz\,\hat{i}|\hat{k}$$

$$+ yx\,\hat{j}|\hat{i} + yy\,\hat{j}|\hat{j} + yz\,\hat{j}|\hat{k}$$

$$+ zx\,\hat{k}|\hat{i} + zy\,\hat{k}|\hat{j} + zz\,\hat{k}|\hat{k}$$

$$= \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = xx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} + \cdots + zz \begin{pmatrix} & & \vdots \\ & & 0 \\ \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{1}$ hat kart. Darstellung δ_{ij} oder $\mathbb{1} = \hat{i}|\hat{i} + \hat{j}|\hat{j} + \hat{k}|\hat{k}$

siehe Weatherburn $\longleftarrow$

siehe Ricci-Kalkül

<u>Infinitesimale Drehungen</u>

Ansatz: $\vec{r}\,' = A(\vec{r})$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{\left[\mathbb{1} + \epsilon\right]}_{\text{Tensor(funktion) bildet VR auf VR ab}} (\vec{r})$$

unterscheide ε & ϵ

$$(\mathbb{1} + \epsilon_1) \circ (\mathbb{1} + \epsilon_2) =$$
$$= \mathbb{1} + \epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_1 \circ \epsilon_2$$
$$= \mathbb{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad + O(2)$$

?

$$(\mathbb{1} + \epsilon_1) \circ (\mathbb{1} + \epsilon_2) \neq (\mathbb{1} + \epsilon_2) \circ (\mathbb{1} + \epsilon_1)$$

aber $\mathbb{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2$
$= \mathbb{1} + \epsilon_2 + \epsilon_1$

Drehungen vertauschen nicht,

infinitesimale Drehungen aber schon

Alle Drehungen lassen sich aus infinit. erzeugen

Drehung im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ um z-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um y-Achse

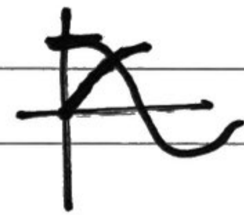
falsch

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Achtung: hier links-rechts statt xz Permutation

um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$



infinitesimal: $\alpha, \beta, \gamma \to 0$

x: $-\mathbb{1}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

y: $-\mathbb{1}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z: $-\mathbb{1}$
$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{1}+\epsilon_x)\cdot(\mathbb{1}+\epsilon_y)\cdot(\mathbb{1}+\epsilon_z)$$

$$= \mathbb{1} + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: tiefe Symmetrien (Spiegelung) erfordern

$$\left.\begin{matrix} x \to y \\ y \to z \\ z \to x \end{matrix}\right\} \text{Drehung}$$

$x\,y\,z\,x\,y\,z\,x\,y\,z$

wollen wir!

Aber Sprache & Matrizen

$$\begin{pmatrix} xx & \underline{xy} & xz \\ \cancel{yx} & yy & \underline{yz} \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = \vec{r} \,|\, \vec{r}$$

um z: von x nach y

um y: von z nach x

um ~~x~~: von y nach z

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & +\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Darstellung der allgemeinen infinitesimalen Drehung

Ü: obiges & Eulerformel

$\vec{dr} = \vec{\omega} \times \vec{r} \to$ Greiner