Universität Potsdam	SS2020: Übung 02
Institut für Physik und Astronomie	V: Feldmeier
Abgabe am 30. April 2020, 24 Uhr	Schwarz[1]

Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik[2]

32 Punkte

1. Flussintegral bei radialer Strömung — 5 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld einer Strömung $\vec{v}(\vec{r}) = \frac{c}{r^3}\vec{r}$ mit $\vec{r}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = |\vec{r}|$ und $c = \text{const} \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das Vektorfeld für $z = 0$ (1P). Wie groß ist der Fluss $\oint \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{v}$ durch eine konzentrische Kugel mit Radius R?(4P)

2. Kurvenintegral bei Scherströmung — 8 Punkte

Skizzieren Sie das Vektorfeld der Scherströmung $\vec{v}(\vec{r}) = x\hat{y}$ mit $\vec{r}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (1P). Berechnen Sie das geschlossene Kurven/Linienintegral $\oint_\gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ für $z = 0$ für die Umfahrung γ des Koordinatenursprungs entgegen dem Uhrzeigersinn auf dem Rand des achsparallelen Quadrats mit der Kantenlänge k. Mittelpunkt des Quadrat sei ebenfalls der Koordinatenursprung. (5P) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$. Bestätigen Sie den Satz von Stokes.(2P)

3. Kurvenintegral eines azimutalen Geschwindigkeitsfeldes — 6 Punkte

Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ des Wirbels (1P). Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{K(R)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}$ des azimutalen Geschwindigkeitsfeldes längs des Randes eines konzentrischen Kreises mit dem Radius R, indem Sie den Rand entgegen dem Uhrzeigersinn bei für $z = 0$ umfahren.(3P) Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{v}$. Bestätigen Sie den Satz von Stokes.(2P)

4. Linienintegral — 7 Punkte

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ der Kraft $\vec{f}(x,y,z) = xyz(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ längs:

a) der Geraden $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$,
b) der Raumdiagonalen,
c) der Kurve $\vec{r} = (t^2, t^3, t^4)$ mit $0 \leq t \leq 1$!

Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{f}$.(1P)

[1] udo.schwarz@uni-potsdam.de

[2] http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2020SSMechanik/2020SSMechanik.html http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/

5. Gauß'scher Satz im $\mathbb{R}^2$ **3 Punkte**

Verifizieren Sie den Gauß'schen Satz für 2-dimensionale Felder im $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie dazu die beiden Felder $\vec{R} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho}$ und $\vec{T} = \rho\hat{\varphi}$.

6. Oberflächenintegrale **3 Punkte**

Berechnen Sie die Flächenintegrale $\int_{\partial M} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x})$ auf dem Rand ∂M der durch den Körper einbeschriebenen Punktmenge M:

a) $\vec{E}(\vec{x}) = (x + y^2 + z^2, x/z, 2z - y/x)$ und $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

b) $\vec{E}(\vec{x}) = (-y, x, z^2)$ und $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$.

c) $\int_{\partial M} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{z}$ für die Nordhalbkugel.