

Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik²

20 Punkte

1.

Flächen-Satz

4 Punkte

a) Beweisen Sie: Sei

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

die kartesische Parameterdarstellung einer *geschlossenen* ebenen Kurve. Dann ist die von der Kurve umschlossene Fläche gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} \oint (x\dot{y} - y\dot{x}) dt, \quad (1)$$

wobei $\dot{x} = dx/dt$ und $\dot{y} = dy/dt$. Das Ringintegral bedeutet $t_{\text{Anfang}} = t_{\text{Ende}}$ für den beliebigen Kurvenparameter t . Welcher Umlaufsinn wird in Glg (1) verwendet? Betrachten Sie auch nicht-konvexe Kurven (mit „Einbuchtungen“).
Anleitung: Elementare Integral-Definition. Skizzen.

b) Transformieren Sie Glg (1) auf Polarkoordinaten und erklären Sie anhand einer Skizze erneut, dass A die von der Kurve umschlossene Fläche ist.

2.

Ellipsengleichung

4 Punkte

Leiten Sie die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten aus der geometrischen Definition der Ellipse her: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten (Brennpunkte) konstant ist ($= 2a$). Der Koordinatenursprung soll sich in einem der Brennpunkte befinden.

3.

Potentialtopf und Stabilität von Kreisbahnen

8 Punkte

Kreisbahnen sind in allen anziehenden, rotationssymmetrischen Zentralkraft-Feldern möglich. Von großer Wichtigkeit für z.B. Planeten- und Satelliten-Bahnen ist die Stabilität von Kreisbahnen.

a) Suchen Sie die Bedingungen für die Stabilität von Kreisbahnen in einem beliebigen, rotationssymmetrischen Zentralkraft-Feld!

(*Hinweis:* Verwenden Sie das effektive Potential/Potentialtopf)

b) Für welche Potenzen n hat ein Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ stabile Kreisbahnen?

¹udo.schwarz@uni-potsdam.de

²<http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2020SSMechanik/2020SSMechanik.html>
<http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/>

c) Und für welche Parameter r_0 existieren bei dem Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r}e^{-r/r_0}$ stabile Kreisbahnen?

4. Freier Fall aus gestoppter Kreisbahn

4 Punkte

Sei T die Umlaufzeit um den Zentralkörper. Zeigen Sie, dass für die Fallzeit τ eines Körpers aus gestoppter Kreisbahn gilt: $\tau = \frac{T}{\sqrt{32}}$.