SYNTAX UND SEMANTIK:
DER ABSTRAKTE GÖDELSCHE SATZ

Achim Feldmeier, 7. Juli 2008

Metamathematik und Gödelzahlen

“Gödel bemerkte, dass von einem theoretischen Standpunkt aus betrachtet die besondere Art der verwendeten Zeichen völlig irrelevant ist und dass man stattdessen ein Standardsystem der ‘Kodierung’ verwenden kann, in dem jedes benutzte Symbol durch eine bestimmte natürliche Zahl repräsentiert wird.” (Kneebone, Seite 230)

“Wenn diese neue metamathematische Technik auf die formalisierte Arithmetik selbst als primäre Theorie angewandt wird, öffnet sich ein Weg zu einer höchst wichtigen Einsicht ... Die Metamathemataik des formalisierten Systems wird in diesem System selbst formalisierbar. Damit entsteht eine Situation, die die Benutzung (exploitation) der Art von Selbstbezüglichkeit gestattet, die die Grundlage des Cantorschen Beweises bildet, dass keine Klasse gleichmächtig zur Klasse all ihrer Unterklassen ist ... und des Paradoxons vom Mann, der erklärt: ‘Die Aussage, die ich jetzt mache, ist unwahr’.” (Kneebone, Seite 230)

“In natürlichen Sprachen betrachten Linguisten erst in neuerer Zeit [seit den 1960er Jahren] sogenannte ‘performative’ Aussagen. Deren charakteristische Eigenschaft ist *Selbstbezüglichkeit*, die definiert werden kann als die ’Fähigkeit sich auf eine Wirklichkeit zu beziehen, die sie selbst erzeugt.’ Beispiele performativer Aussagen sind: ’Ich schwöre feierlich,’ ’ich erkläre eine Generalmobilmachung,’ und ’ich ernenne Sie zum Direktor’ (wenn man in der Position ist, die letzten zwei Dinge wirklich zu bewirken).” (Manin, Seite 82)

Eine abstrakte formale Sprache

Das folgende nach Smullyan.

DEF 1: Gegeben sei eine Sprache mit einer Menge von **Ausdrücken** E (expressions). Eine Teilmenge der Ausdrücke seien **Sätze**. Eine Teilmenge $\mathcal{P}$ der Sätze seien **beweisbare** Sätze (provable). Eine womöglich andere Teilmenge

$\mathcal{T}$ der Sätze seien **wahre** Sätze (true).

DEF 2: Eine Teilmenge $\mathcal{H}$ der *Ausdrücke* heiße **Prädikate** (bei Gödel: **Klassennamen**). Es sind dies "Namen" (der Ausdruck ist nicht definiert) für Mengen von natürlichen Zahlen, oder (dies wird gleich definiert) solche Mengen werden von ihnen *ausgedrückt*: Menge der geraden Zahlen; Menge der Primzahlen.

DEF 3: Wenn E ein *Ausdruck* ist, dann sei auch $E(n)$ ein *Ausdruck*. Wenn H ein *Prädikat* ist, dann sei $H(n)$ ein *Satz*, nämlich der Satz: "n hat das Prädikat H, d.h. n gehört zu der durch H *ausgedrückten* Menge."

DEF 4: Eine Menge A von Zahlen wird durch das *Prädikat* H **ausgedrückt** wenn

$$\forall n : \quad H(n) \in \mathcal{T} \quad \leftrightarrow \quad n \in A.$$

DEF 5: Allen *Ausdrücken* E wird bijektiv eine **Gödelzahl** $n = g(E)$ zugeordnet. Wegen bijektiv kann man schreiben $n = g(E_n)$. Insbesondere sei P die Menge der Gödelzahlen der beweisbaren *Sätze*, also $P = g(\mathcal{P})$.

DEF 6: Die **Diagonalisierung** der *Aussage* E_n ist die *Aussage* $E_n(n)$. Beachte: $H_n(n)$ ist ein *Satz*.

DEF 7: Die *Gödelzahl* der *Diagonalisierung* nennt man **Diagonalfunktion**,

$$d(n) = g\big(E_n(n)\big).$$

d ist die zentrale Funktion des Gödelschen Beweises.

DEF 8: Zu einer Menge A von Zahlen wird die Menge $A^* = d^{-1}(A)$ eingeführt durch

$$\forall n : \quad n \in A^* \quad \leftrightarrow \quad d(n) \in A.$$

Unvollständigkeitssatz (Gödel 1931; mit Elementen von Tarksi 1936). Falls $(\neg P)^*$ *ausgedrückt* werden kann, dann gibt es einen *wahren Satz*, der nicht *beweisbar* ist.

Beweis: Das Prädikat H soll $(\neg P)^*$ ausdrücken. Es sei $h = g(H)$ die Gödelzahl von H. Dann ist $H(h)$ der gesuchte Satz:

$$\begin{aligned} H \text{ drückt } (\neg P)^* \text{ aus} \leftrightarrow \forall n : H(n) \in \mathcal{T} &\leftrightarrow n \in (\neg P)^* \\ \rightarrow \qquad H(h) \in \mathcal{T} &\leftrightarrow h \in (\neg P)^* \\ &\leftrightarrow d(h) \in \neg P \\ &\leftrightarrow d(h) \notin P \\ &\leftrightarrow g(H(h)) \notin P \\ &\leftrightarrow H(h) \notin \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Die zweite Zeile, also die Diagonalisierung, ist wie beim Turingschen Satz das Äquivalent zu den selbstbezüglichen Paradoxa der Mengenlehre.

Anmerkung 2. Die Voraussetzung des Satzes, also dass $(\neg P)^*$ ausgedrückt werden kann, wird für die Peano-Arithmetik mit einigem formalen Aufwand erbracht, fügt aber den obigen selbstbezüglichen Feinheiten kaum neue hinzu.

Anmerkung 3. Insbesondere folgt diese Voraussetzung relativ schnell, wenn man gezeigt hat, dass P ausdrückbar ist. Dies zu zeigen erfordert den meisten Aufwand, ist aber intuitiv klar: was *beweisbar* ist, ist *ausdrückbar*.

Anmerkung 4: Man interessiert sich nur für "wahr → nicht beweisbar". Die alternative Möglichkeit "nicht beweisbar → wahr", also "nicht wahr → beweisbar, wird ausgeschlossen, indem man sog. *Konsistenz* der Sprache fordert.

Repräsentierbarkeit

Im folgenden wie Gödel (1931) original: ohne Tarskis Menge $\mathcal{T}$ der wahren Sätze:

Es geht nur um beweisbar und widerlegbar.

DEF 9: Eine Formel $F(v)$ mit einer Variablen v **repräsentiert** eine Zahlenmenge A wenn

$$\forall n : \quad F(n) \text{ beweisbar} \quad \leftrightarrow \quad n \in A.$$

Sei P bzw R die Menge aller Gödelzahlen von Sätzen, die beweisbar (Provable) bzw widerlegbar (Refutable) sind.

Sei P^* bzw R^* die Menge aller Gödelzahlen n, für die der Satz $E_n(n)$ beweisbar bzw widerlegbar ist.

Gödels Kernargument

Satz. Wenn die Menge R^* in einem Axiomensystem $\mathcal{S}$ repräsentiert werden kann, dann ist $\mathcal{S}$ unvollständig.

Beweis (Smullyan, Seite 60). Die Formel $H(v)$ soll R^* repräsentieren. Sei h die Gödelzahl von $H(v)$. Dann gilt

$$H(h) \text{ beweisbar} \quad \leftrightarrow \quad h \in R^* \quad \leftrightarrow \quad H(h) \text{ widerlegbar.}$$

Den Fall beweisbar *und* widerlegbar schließt man durch Postulat der *Konsistenz* von $\mathcal{S}$ aus (die hier also leicht anders als oben definiert ist). Somit ist der Satz weder beweisbar noch widerlegbar.

Gödels Gödelsatz

Von hier aus nur ein kleiner Sprung zu Gödels originalem Gödelsatz:

Eine Formel $A(v, w)$ soll die Menge P^* **abzählen** (enumerate).

Dies bedeutet im wesentlichen: $\exists w A(v, w)$ *repräsentiert* P^*.

Sei a die Gödelzahl der Formel ($\sim$ ist die Negation)

$$\forall w \sim A(v, w).$$

Dann ist nach Gödel der Satz

$$\forall w \sim A(a, w)$$

weder beweisbar noch widerlegbar.

Verbindung zu Penrose und Searle

Smullyan, Seite 73: "We know that Gödel's sentence G for Peano Arithmetic (P.A.) is true. We have informally 'demonstrated' the truth of G, but the demonstration is evidently not formalizable in P.A."

Ein bemerkenswerter Schluss aus Gödels Satz

Smullyan, Seite 73: "The average mathematician appears not even to have heard of the still more remarkable fact [than Gödel's incompleteness theorem]":

Satz: In P.A. gibt es eine Formel $F(v)$ mit einer Variablen, so dass alle Sätze $F(0), F(1), F(2), \ldots$ beweisbar sind, aber nicht die Aussage $\forall v F(v)$.

Literatur:

R. Smullyan, Gödel's Incompleteness Theorems, Oxford University Press, 1992.
Fantastisches Buch von einem der großen lebenden Logiker. Der erste Beweis einer abstrakten Version des Gödelschen Satzes auf Seite 5 bis 7! Daraus das obige.

G. Kneebone, Mathematical Logic and the foundations of mathematics, Van Nostrand, 1963, inzwischen auch bei Dover.
Stark an den Originalarbeiten orientiert, zitiert entscheidende Passagen. Bespricht auch philosophische Aspekte.

Yu. Manin, A Course in Mathematical Logic, Springer, 1977.
Hartes, originelles Lehrbuch.