L E K T Ü R E K U R S

N A T U R A L   P H I L O S O P H Y

"...das am 29. Oktober 1675 erfundene Integralzeichen."

Vorab

Woran ist eine Philosophie-Vorlesung erkennbar?

An Selbstreflexivität.

Also wird diese Vorlesung nicht philosophisch sein.

Bestimmung "Positivismus": vor allem: "unproblematisch".

In den Naturwissenschaften werden Dinge unproblematisch angenommen.

Andererseits: Originalquellen

Quellen gelten in empirischen Wissenschaften praktisch nichts.

Bis hin zu absichtlichen Fehlzuordnungen von Entdeckungen:

Die Lagrangeableitung, das Lagrangebild, die Lagrangegleichung stammen alle drei von Euler.

Diese Vorlesung ist dagegen an Originaltexten orientiert.

Zu den Originalen: von der Homepage der Bibliothek der Uni Graz:

“Das 17. Jahrhundert brachte einen starken Qualitätsverfall – mit einigen wenigen Ausnahmen – im Druckgewerbe, wenn auch die Produktion quantitativ weiter zunahm. Es war das Jahrhundert der großen Autoren und der schlechten Drucker. Shakespeare, Cervantes, Corneille und La Fontaine sollten ihre Werke nie in typographisch hochrangigen Drucken zu Gesicht bekommen. Der Kupferstich setzte sich als vorherrschende Illustrationstechnik im Buche durch. Als einzige echte Neuerung ist die Einführung periodisch erscheinender Zeitungen und Zeitschriften hervorzuheben. Das älteste wissenschaftliche Periodikum ist das Journal des Scavans, das ab 1665 in Paris erschien. Zur gleichen Zeit wie in Paris begann in London eine wissenschaftliche Zeitschrift zu erscheinen: die Philosophical Transactions der Royal Society.”

Zu den Quellen: John Rawls

Amerikanischer Philosoph (Harvard), 1921-2002

Hauptwerk: A theory of justice (1971).

Aus seiner “Geschichte der Moralphilosophie” (Suhrkamp-Verlag, S. 17):

„In meinen Vorlesungen habe ich nicht gesagt (jedenfalls nicht absichtlich), was der betreffende Autor nach meinem Dafürhalten hätte sagen sollen, sondern ich habe wiedergegeben, was er tatsächlich gesagt hat... Der Text mußte bekannt sein und respektiert werden, und sein Lehrgehalt mußte in der besten Form vorgestellt werden. Den Text beiseite zu lassen, erschien mir kränkend; es wäre eine Art von Anmaßung gewesen.“

„Ich bin stets davon ausgegangen, daß die Autoren, die wir studierten, viel gescheiter gewesen waren als ich selbst. Wären sie es nicht gewesen, warum hätte ich dann meine eigene Zeit und die der Studenten mit ihrer Lektüre vergeuden sollen? Wenn ich in ihren Argumenten einen Fehler erblickte, nahm ich an, daß diese Autoren ihn auch selbst gesehen hatten und irgendwie damit fertig geworden waren. Aber wo? Ich suchte keinen eigenen Ausweg, sondern ihren Ausweg.“

„Das Ergebnis war, daß ich eine Abneigung dagegen verspürte, Einwände gegen die Vorbilder zu erheben; das ist zu bequem und geht am Wesentlichen vorbei.

Wichtig war es jedoch, auf Schwierigkeiten hinzuweisen.“

„Wenn es um Kant ging, habe ich überhaupt kaum Kritik geübt.“

Nochmals: keine Philosophievorlesung

Auch wegen folgendem kann dies keine Philosophievorlesung sein:

Heidegger: “"Die Wissenschaft denkt nicht."

Vortragsweise und Skript

Physikalischer Vortrag hält sich eng an die mathematischen Herleitungen.

Hier Textmitschrift in skizzenhafter Form.

In das Skript sind die Originalquellen eingebaut.

Viele Originaltexte in Ostwalds Klassikern:

Ins Deutsche übersetzte Originalarbeiten von Leibniz, Newton, Euler, Lagrange.

Wichtigste Einzelbücher:

Principia Mathematica und Kritik der reinen Vernunft.

Die Vorlesung versucht, Fakten zu nennen und Deutungen zu vermeiden.

Behandelte Themen

Wir werden uns auf die Zeit etwa von 1650 bis 1830 beschränken.

Also Barock, Empirismus, Aufklärung, Klassik.

Kein Kopernikus, Galilei, Kepler, Descartes.

Grob: von Newton bis Gauß.

Lesetipp zu Gauß: „Die Vermessung der Welt" von Daniel Kehlmann.

Teil I: Differentialrechnung bei Newton und Leibniz

Teil II: Newtons Principia Mathematica

Teil III: Humes Kritik am Kausalitätsgesetz

Teil IV: Kant

Teil V: Variationsrechnung

Teil VI: Das d'Alembertsche Prinzip

Teil VII: Die nichteuklidische Geometrie

Lebenszeiten

```
                      1560    80  1600  20    40    60    80  1700  20    40    60    80  1800  20  1840
                         |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Galilei     1564-1642   ____________________Galilei
Kepler      1571-1630     _______________Kepler
Descartes   1596-1650           ______________ Descartes
Barrow+     1630-1677                    ___________Barrow
Newton      1642-1727                       _____________________Newton
Leibniz*    1646-1716                        _________________Leibniz
J.Bernoulli 1655-1705                          ____________J.Bernoulli
Euler       1707-1783                                       ___________________Euler
Hume        1711-1776                                        _________________Hume
d'Alembert  1717-1783                                         _________________d'Alembert
Kant        1724-1804                                           ____________________Kant
Lagrange    1736-1813                                              ____________________Lagrange
Gauss       1777-1855                                                        _____________________


+ Lehrer Newtons
* geboren in Leipzig
```

Also grob drei Epochen:

1. (frühes 17. Jhd) Grundlegung Physik und Philosophie (Galilei, Kepler, Descartes)

2. (spätes 17. Jhd) Grundlegung Analysis (Newton, Leibniz, Bernoulli)

3. (18. Jhd) Ausformulierung; Aufklärung (Euler + Lagrange, Hume + Kant)

4. Gauß' Büro ist noch in Gebrauch: Sternwarte Göttingen

Einführung: Kepler

Kepler und Galilei begründen die moderne Physik:

Physik ist mehr als Geometrie: von der Sonne ausgehende $Kraft$.

Heute eher wieder pre-Keplersch.

Ellipsenbahnen der Planeten:

Untersuchung zu Sehfehlern anhand von Ochsenaugen.

Sind die Bahnellipsen nur durch Sehfehler verursacht?

Der Traum vom Mond

“Die Schwere definiere ich als eine Kraft, die dem Magnetismus ähnlich ist und mit der Attraktion in Wechselwirkung steht. Die Gewalt dieser Anziehung ist größer unter nahestehenden als unter entfernteren Körpern; daher leisten sie der Trennung voneinander stärkeren Widerstand, wenn sie sich noch nahestehen.”

Bereits richtiges Konzept von $v_{\rm esc}$:

“Diese Anfangsbewegung ist für ihn [den Mondreisenden] die schlimmste; denn er wird gerade so emporgeschleudert, als wenn er, durch die Kraft des Pulvers gesprengt, über Berge und Meere dahinflöge. Deshalb muß er zuvor durch Opiate betäubt ... werden.”

“Infolge der bei Annäherung an unser Ziel [den Mond] stets zunehmenden Anzieung würden sie [die Mondreisenden] durch zu harten Anprall an den Mond Schaden leiden.”

Beschreibung von Erdfinsternissen auf der erdzugewandten Seite: da die Erde deutlich größer ist als die

Sonne, sind Tag und Nacht dort nicht allzu verschieden. Wenn es aber zu einer Sonnenfinsternis kommt (die wegen der großen Fläche der Erde am Himmel erstens häufig, zweitens lang sind), erlöschen beide Lichtquellen zugleich, was einen drastischen Effekt gibt.

Teil I: Anfang der Differentialrechnung bei Newton und Leibniz

Nach Newton

Literatur: Oswalds Klassiker, Band 164.

Bereits Newtons Lehrer Barrow in Cambridge erkennt 1670 in seinem Hauptwerk:

Differentiation und Integration sind Umkehroperationen.

Sein "inverses Tangentenproblem" (viel bei Leibniz genannt) heißt heute:

Integration von DGL erster Ordnung.

Teilweise war Newton hier Anregender. Hat aber auch Anregungen erhalten.

Newton beginnt mit 19 Studium der Mathematik in Cambridge.

Hervorragende Rahmenbedingungen und Lehrer.

Leibniz dagegen mathematischer Autodidakt.

Barrow verzichtet im Alter von 39 Jahren zugunsten von Newton auf seine Professur und wird wieder (!) Priester.

Im Alter von 23 beginnt Newtons eigene Produktion:

Binomialformel, Fluxionsmethode 1665-67.

Erhaltenes erstes handschriftliches Manuskript zur Diff.Rechnung von 1665.

1671 (29) Newtons Methodus Fluxionum fertig, aber lange ungedruckt.

Erste Veröffentlichung zur Inf.rechnung erst 1704:

Fast 40 Jahre nach ihrer Entwicklung.

Ebenfalls erhalten: Brief von Newton an Collins von 1672 über Fluxionsrechnung:

Kalkül zur Bestimmung von Tangenten, Krümmung, Quadratur (Flächeninhalt), und Schwerpunkte beliebiger Kurven.

Newton gab Manuskript von 1665 (23) Barrow, dieser gab es Collins in London zur Veröffentlichung.

Der zeigte es 11 Jahre später, 1676, dem durchreisenden Leibniz.

Beachte aber: Leibniz hat schon 1675 das Integralzeichen eingeführt.

In Leibniz Nachlass gefunden, in dessen Handschrift:

"Auszüge aus einer handschriftlichen Abhandlung Newtons."

Kann nur während der Reise angefertigt worden sein:

Mindestens ein Abschnitt ist praktisch identisch übernommen.

Auch Newtons Principia mathematica erschien 1687 nur durch Überredung durch Halley.

Heute sicher: Ergebnisse der Principia wurden mit Fluxionsrechnung gefunden.

Danach erst in geometrische Beweise umgemünzt.

Möglicher Grund: neue Methode schreckt Leser ab.

Noch in der zweiten Auflage der P.M. von 1713 schreibt Newton:

Leibniz habe 1676 auf seine, Newtons, briefliche Andeutungen zur Differentialrechnung sofort mit dem fertigen Kalkül geantwortet; diesen also gekannt.

Newtons Schrift: Abhandlung über die Quadratur der Kurven

1704 erschienen.

Abgedruckt in Ostwalds Klassiker Bd 162.

Großer Unterschied zu Leibniz:

Newton kommt von Kinematik (Leibniz von Geometrie).

Differential als Bewegung entlang Kurven, also Zeitdifferential.

Geschwindigkeit des Wachstums, der Bewegung.

“Bewegungs- oder Wachstumsgeschwindigkeiten heißen Fluxionen”.

Fluxionsrechnung.

Z.B. bestimme $s(t)$ bei gegebenem $v(t)$: Quadratur von Kurven.

Laut Newton selbst zwischen 1665 (23) und 1666 erfunden.

Bereits erster Satz der Einleitung (diese erst 1704 geschrieben) ist Front gegen Leibniz:

“Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben.”

Das antike Problem der Zusammensetzung der Bewegung aus Ortsänderungen wird von Newton radikal gelöst:

Für ihn ist Bewegung das primäre, nicht zerlegbare.

"Die Wachstumsgeschwindigkeiten $(v\,dt)$ verhalten sich wie die in gleichen Zeitteilchen erzeugten Zunahmen der erzeugten Größen (ds), und sie stehen, um genau zu reden, im ersten Verhältnis der Zunahmen."

4. Soll die Sekante Cc mit der Tangente CH zusammenfallen, so müssen die Punkte C und c zusammenrücken.

Das Dreieck CET, im limes infinitesimaler Seitenlänge, ist Pascals *charakteristisches Dreieck*, das Leibniz – Pascal zitierend! – regelmäßig verwendet.

8. Gerade, die sich um Pol dreht. Auch Cantor S.280.

10. Die Größe x möge gleichförmig fließen, und es sei die Fluxion der Größe x^n zu finden.

In der Zeit, in der x zu $x+o$ wird, wird x^n zu $(x+o)^n$, d.h. nach der Methode der unendlichen Reihen zu

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \text{usw.}$$

Die Zunahmen o und

$$nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, o^2 x^{n-2} + \mathrm{usw}$$

verhalten sich zueinander wie 1 zu

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o x^{n-2} + \mathrm{usw.}$$

Nun mögen jene Zunahmen verschwinden.

Dann wird ihr letzten Verhältnis 1 zu nx^{n-1} sein.

Es verhält sich daher die Fluxion der Größe x zu der Fluxion der Größe x^n wie 1 zu nx^{n-1}.

Siehe auch Cantor für diese Stelle.

11. "Es harmoniert aber mit der Geometrie der Alten, die Analysis in endlichen Größen anzustellen und von endlichen Größen, die eben beginnen oder verschwinden, die ersten oder letzten Verhältnisse aufzuspüren. Und ich wollte zeigen, daß es bei der Fluxionsmethode nicht nötig ist, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen.

"Erste und letzte Verhältisse" sind, was heute Differentialquotient heißt:

Ein Verhältnis im limes infinitesmialer Größen:

die “eben beginnen oder verschwinden”.

Der erste Satz ist also klar und modern.

Andererseits hadert Newton hier, wie auch in der P.M.:

“Man kann den Einwand machen, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr stattfinde.”

Die Antwort ist aber ganz klar in der P.M.:

Man muß den limes des Verhältnisses finden;

nicht das Verhältnis der limites: das ist $0/0$:

“Die letzten Verhältnisse sind nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die limites, denen sich die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen nähern.”

Leibniz führt aber auch keine uendlich kleinen Figuren ein.

Newton führt als nächstes die Schreibweise $\dot{x}$ ein für die Fluxionen.

Fluxion der Fluxion ist $\ddot{x}$.

Er findet nun durch Reihenentwicklung die Zeitableitung von

$$x^3 - xy^2 + a^2 z - b^3 = 0.$$

Diese ist

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0.$$

Newton: die erste Glg ist Beziehung zwischen x, y, z; die zweite Glg ist Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Dann Übergang zur Integration, die ein schwierigeres Problem sei als die Differentiation.

§10 gibt Integral von Potenzfunktionen.

Es folgt eine Tabelle "Form der Kurve", "Fläche der Kurve":

die erste Integraltafel.

Darin auch Kegelschnitt-Integrale.

Newtons Schlußsatz:

"Durch diese Anfänge wird der Weg zu Größerem geebnet."

Wann wurde die Schrift verfaßt?

Laut Newton war das meiste schon in dem Brief an Leibniz von 1676.

Der Inhalt selbst wurde wohl zur Veröffentlichung 1704 aktualisiert.

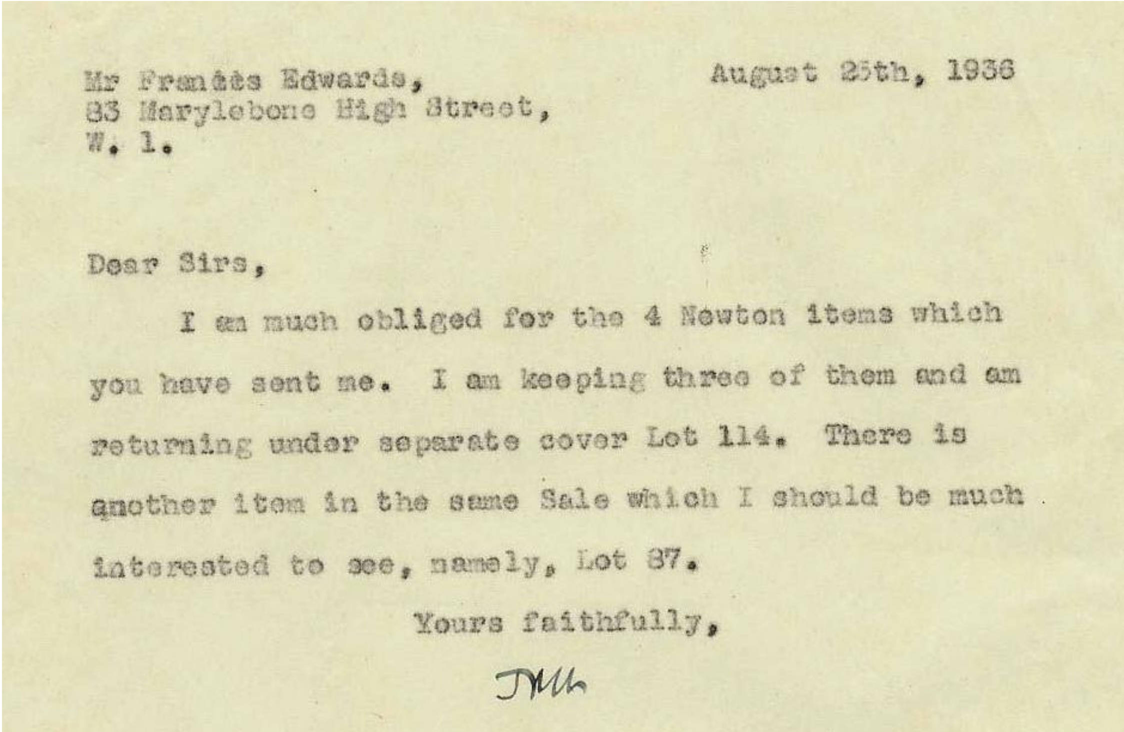
Die Einleitung mit vielen wichtigen Stellen zur Idee der Fluxionsrechnung (siehe auch unten) ist sicher neu.

Viele Originalhandschriften Newtons zusammengeführt von Keynes.

Archiv `http://www.newtonproject.ic.ac.uk`

Nach Leibniz 1684

Literatur: Oswalds Klassiker Band 162.



Mr Francis Edwards, August 25th, 1936
83 Marylebone High Street,
W. 1.

Dear Sirs,

I am much obliged for the 4 Newton items which you have sent me. I am keeping three of them and am returning under separate cover Lot 114. There is another item in the same Sale which I should be much interested to see, namely, Lot 87.

Yours faithfully,

JMK

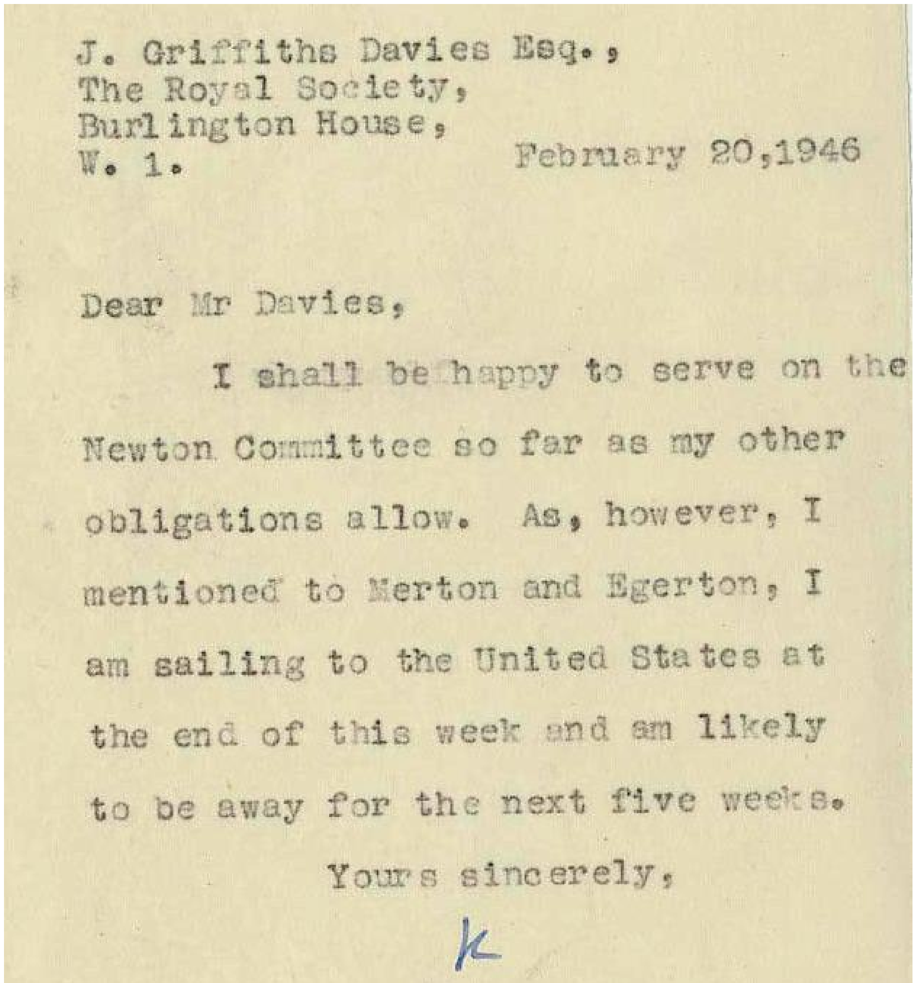
Zur Geschichte (siehe "Anmerkungen" dort):

seit 1673 (27) versucht Leibniz, bei allen Tangentenkonstruktionen Pascals charakteristisches Dreieck anzuwenden:

Dieses besteht aus einem unendlich kleinen Bogenstück und den zugehörigen Abszissen- und Ordinatendifferenzen.

In einem Brief von 1675 taucht das Integralzeichen auf.

1675 (29) taucht das Differential dx in heutiger Bedeutung auf.


J. Griffiths Davies Esq.,
The Royal Society,
Burlington House,
W. 1.

February 20,1946

Dear Mr Davies,

I shall be happy to serve on the Newton Committee so far as my other obligations allow. As, however, I mentioned to Merton and Egerton, I am sailing to the United States at the end of this week and am likely to be away for the next five weeks.

Yours sincerely,

K

“Quia istud dx est modification quaedam ipsius x” (1686).

Newtons Fluxionsrechnung leistete dasselbe, war auch früher entstanden, aber unveröffentlicht.

Aber: 1675 kam Tschirnhaus von London, wo er Newton getroffen hatte, zu Leibniz.

Und: 1676 ist Leibniz einige Tage bei Collins in London, der Newtonsche Manuskripte aufbewahrt.

Auch: 1676 zwei Briefe Newtons an Leibniz mit versteckten Andeutungen.

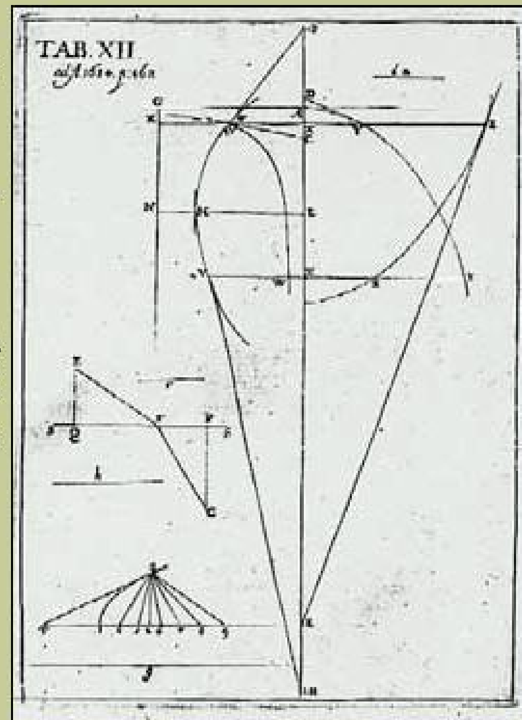
Aber: schnelle Antwort auf diese Briefe zeugt von eigener Vertrautheit mit dem Kalkül.

Auch: Newton nennt Leibniz in der Erstauflage der Principia 1687 als unabhängigen Entdecker der Differentialrechnung.

Und: wegen diplomatischer Pflichten im hannoverschen Staatsdienst seit 1676 veröffentlicht Leibniz erst 1684 erstmals zum Differentialkalkül.

Seit 1699 Plagiatsstreit mit Newton.

The Dibner Library completes its set of the Heralds of Science with the purchase of a set of the Acta Eruditorum containing Leibniz's article on the new method of differential calculus.



The Dibner Library is at long last happy to announce that it has now collected all of the works listed as being in Bern Dibner's *Heralds of Science*. The last piece of the puzzle was Herald 109, Leibniz's 1684 article in the journal *Acta eruditorum* on the invention of the differential calculus. The Spring 2001 issue of *Dibner Library News* noted how we managed to obtain three of the four Heralds that we were missing, but the Leibniz article still eluded us. Fortunately, the opportunity arose for us to not only purchase the Leibniz article, but also a complete run of the *Acta eruditorum* from the first volume of 1682 through 1731.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), a German philosopher and mathematician, although largely self-trained, became adept at working on some of the most sophisticated mathematical problems of the time, including work on infinite series and infinitesimals. In 1675 to 1676, Leibniz made his breakthrough on the development of calculus, a mathematical method used to determine the rates of change of quantities. Such problems were not solvable through algebra or geometry alone, and their solution occupied mathematicians throughout the seventeenth century.

Isaac Newton (1642–1727) had developed calculus independently back in 1665 and 1666 but shared his discovery with only a few colleagues and his early treatises on the matter went unpublished. It was not until 1687 that Newton published his discovery in his monumental work, *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Mathematical principles of natural philosophy]. Like Newton, Leibniz did not publish anything on his discovery, and only hinted in his correspondence that he had developed the calculus. It was not until 1684 that Leibniz published his method of finding tangents to curves, the "calculus differentialis," in an article titled "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationals quantitates moratur [A new method for maxima and minima, and also for tangents, which is not obstructed by irrational qualities]." This article is the famous Herald of Science 109 and was published in the Acta eruditorum. In 1686, he followed up this work with a second article on his method of finding the areas under curves, the "calculus integralis," and demonstrated that it was an inverse method of the differential calculus.

Leibniz' Fürst (Hannover!) wurde (auch dank Leibniz) englischer König

...und stellte sich im Prioritätsstreit mit Newton gegen Leibniz.

Artikel von 1684 in Acta Eruditorum

Leibniz erste publizierte Schrift zur Diff.rechnung.

“Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten... und eine eigentümlich darauf bezügliche Rechnungsart.”

Die Ideen darin sind bereits bis zu zehn Jahre alt.

Leibniz’ Zeichnung ist etwas verwirrend;

auch manche Symbole nur im Text, nicht in der Zeichnung;

vor allem: xy Achsen vertauscht; und dx zeigt in y-Richtung.

Für die dritte seiner vier beliebigen Kurven YY sind Bild und Bezeichnung:

```
            |/
            /D
 Y.        /|
    .     / |
      .  /  |x
       . /  |
      Y./   |X
------./-----|--------
     ./  y  |
   .        |
.           |
      |---|
       dx
```

Achtung: dx sollte senkrecht zu sich gezeichnet werden.

Leibniz fordert: es soll die Strecke, die sich zu dx verhält wie y zu x (er statt x: XD), mit dy bezeichnet werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Mit dieser Festsetzung behauptet er wenige Zeilen darauf die Produktregel

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Interessanterweise schreibt er keine allgemeine Produktregel für $d(yz)$. (Beliebige zweite Kurve $z(x)$ neben $y(x)$.)

Aber wenige Zeilen später schreibt er die Quotientenregel für allgemeines $d(y/z)$.

Er stellt fest, daß bei Kurvenextrema $dy = 0$ ist:

"... in dem Augenblick, wo die y weder zunehmen noch abnehmen, sondern im Stillstand begriffen sind, wird alsdann dy gleich 0."

Kurz darauf die Regeln $dx^n = nx^{n-1}dx$

Dann die Ableitung der allgemeinen Wurzel.

"Diesen Kalkül, den ich Differentialrechnung nenne."

"Es lassen sich [damit] Maxima und Minima erhalten."

"Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein."

"Man muß nur festhalten, daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet."

Es gelingt ihm, im Gegensatz zu Newton, $1/x$ zu integrieren.

Trick: er erkennt arithmetische vs geometrische Progression bei y vs x, und dies ist genau Ausdruck des Logarithmus.

Er diskutiert Krümmungen und Wendepunkte mittels ddv.

Krümmungswechsel, wenn $ddv = 0$, ohne daß $v = 0$ oder $dv = 0$ sein muß.

Am Ende des Artikels leitet er mit diesem Kalkül her:

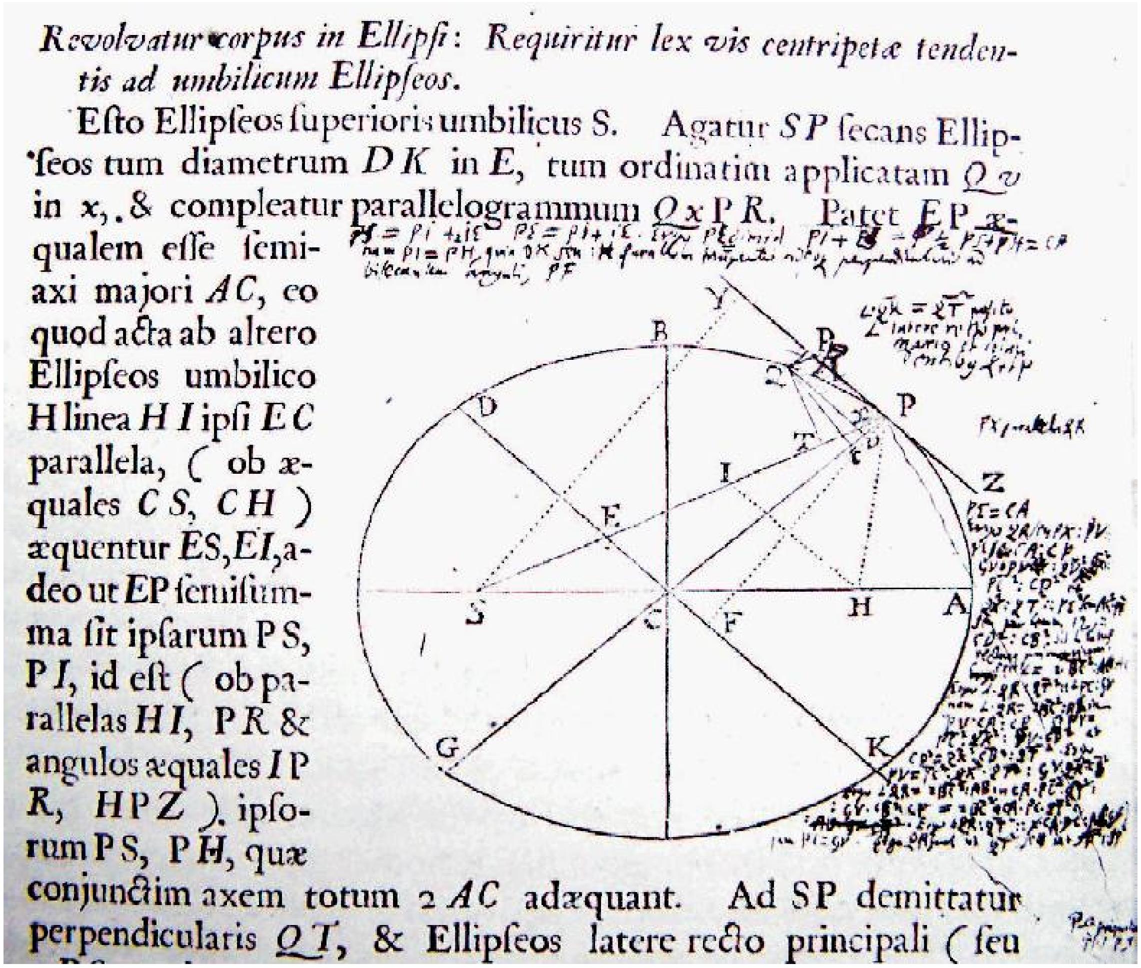
Snelliussches Brechungsgesetz aus dem Extremalprinzip von Fermat:

"Daß der Weg der leichteste ist".

1684 schrieb Newton an der Principia, und beachtete wohl die Leibnizsche Schrift kaum.

Umgekehrt: Leibniz handschriftliche Anmerkungen zu Newtons Hauptbeweis in der Abbildung

Warum schickte Newton 1684 nicht seine Meth flux ein?


Revolvatur corpus in Ellipsi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*), ipſorum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2 *AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu

In Leibniz Aufsatz von 1686 erscheint erstmals das Integralzeichen in Druck.

Alte und neue Zeit:

Noch 1694 schreibt Huygens an Leibniz, dessen Methode bleibe ihm nicht gegenwärtig, wenn er eine Zeit lang aufgehört habe, sich mit ihr zu beschäftigen.

Auch glaubt er, die relevanten Ergebnisse einfacher, direkt finden zu können.

Dagegen Jakob und Johann Bernoulli seit 1684 Anhänger der neuen Methode.

Brauchten laut eigener Aussage Jahre, bis sie Leibniz Schrift verstanden hatten.

Damit 1690 DGL der Isochrone durch Jakob Bernoulli aufgestellt,

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$$

aus geometrischer Überlegung.

Überhaupt 1691/92 Durchsetzung der Differential- und Integralrechnung:

Mehrere Artikel von Jakob Bernoulli in A.E. zeigen deren Verwendbarkeit bei schwierigen Aufgaben.

Newtons und Leibnizens erste Entdeckungen im Gebiete der Infinitesimalrechnung

Das folgende nach Moritz Cantor.

Historisch: warum entwickelte sich Infinitesimalrechnung:

Suche nach Kurvenlängen, Körpervolumen, Flächen, Schwerpunkten.

Wallis 1655 und Newton in seiner Erstlingsschrift 1666:

Fläche unter einer Kurve

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

ist, zwischen 0 und x,

$$\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}.$$

In dieser Schrift vernachlässigt Newton erstmals Differentiale höherer als erster Ordnung:

Waagrechte Linie $y = const$ und Kurve dadurch unterscheiden sich im Intervall dx “nicht”:

sive, quod perinde est.

Genauer: rechne mit ersten Differentialen, und lasse sie am Ende der Rechnung gegen Null gehen.

Differentiale sind “nachmals zum Verschwinden gebrachte Größe”.

Dieser Trick wohl von James Gregory, vor Newton.

Nicht mehr zu klären, wer von wem (mehr) gelernt hat:

Newton von seinem Lehrer Barrows, oder umgekehrt.

Dabei Barrows mehr geometrisch: Tangentenmethode,

Newton mehr analytisch: binomische Entwicklung.

Neutral: Differentiation bei Barrows und Newton gleichwertig.

Aber bei Newton klarer: Differentiation ist Umkehrung von Integration.

(In seiner Sprache: Tangentensuche von Quadratur.)

Die Integration von $1/x$ schafft Newton nicht.

Leibniz 1673 in London. Sieht Newtons Artikel nicht.

Kauft aber Barrows Buch (Brief an Herrn Oldenburg)!

Ist, mit Randbemerkungen versehen, in Lebniz' Nachlass gefunden worden.

Wohl auch gleich gelesen: in Leibniz' ersten Schriften mit unendlich kleinen Dreiecken (Abszissen- und Ordinatenzuwachs von Kurven) finden sich ähnliche Symbole wie bei Barrows.

Leibniz selbst sagt aber, die Idee dieses charakteristischen Dreiecks von Pascal zu haben.

Leibniz stellt Einfluß von Barrows auf seine Ideen in Abrede.

Leibniz sagt, Barrow habe nichts über Fermat hinausgehendes geleistet für das Tangentenproblem.

Einführung von $\int$ und d durch Leibniz 1675.

Newton hatte seit 1671 streng geheim etwas ähnliches.

Cantors etwas verwegene Behauptung:

Grundlegendes Wissen zur Infinitesimalrechnung schon vor Newton und Leibniz vorhanden.

Weiterer Fortschritt hing von zweckmäßiger Bezeichnung ab.

Und diese stammt eindeutig von Leibniz.

Zurück zu Newton: Hauptaufgabe der Fluxionsrechnung:

Geschwindigkeit zu bestimmten bei bekanntem durchlaufenen Weg.

Und umgekehrt.

Def $Fluxionen$: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Der Punkt von Newton selbst.

Für Newton hat jedes Fluxion mechanischen Sinn.

Von Newton stammt der Gedanke, daß nur Differentialquotienten vorkommmen sollten, dy/dx usw.

Er unterscheidet dann drei Glgs.Arten:

heutige Namen dafür: Diff.quotient einer Funktion; gewöhnliche DGL; partielle DGL.

Newtons Problem: er entwickelt alle Funktionen in unendliche Reihen, integriert gliedweise elementar. Weiß aber nicht, was mit $1/x$ anzufangen sei.

Ausweg: Koordinatenverschiebung: ersetze

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{b+x}$$

und entwickle den neuen Ausdruck selbst wieder in eine Reihe.

Ebenfalls Newtons Idee: An Extrema verschwinden die Fluxionen.

Damit Auffinden von Maxima und Minima möglich.

Newton findet auch Kurvenkrümmung:

lege Kreise verschiedenen Radius an einen Kurvenpunkt.

Unter diesen gibt es genau einen "nächsten" zur Kurve:

in infinitesimaler Umgebung des Berührungspunkts gibt es keinen weiteren Kreis $zwischen$ der Kurve und eben diesem Kreis.

Newton gibt geometrischen Beweis dafür.

Detektivarbeit: 1673 erscheint Huygens Buch zu geometrischen Differentialproblemen. Er schickt es Newton, dessen Dankesbrief ist erhalten. In Newtons Methodus fluxionum, die in der Hauptsache vorher entwickelt worden waren, tauchen dann eindeutige Parallelen zu Huygens auf: dieselben Kurvenarten (Zykloide usw) werden in derselben Reihenfolge bearbeitet. Ausmaß der Veränderungen ist nicht feststellbar. Aber Cantor hält fest: wegen der Veränderungen "fällt die Beweiskraft für das Wissen Newtons in früher Zeit."

Nochmals: auf den Brief Newtons an Leibniz, in dem ersterer sich Priorität sichern will durch unbewiesene Nennung vieler Ergebnisse (Produktregel usw), antwortet Leibniz am gleichen Tag mit expliziten Beweisen dieser Ergebnisse. Er hatte sie also selbst.

Veröffentlichung der Newtonschen Briefe an Leibniz von 1676 und früher erst 1693.

Verwunderung bei Johann Bernoulli: ist doch Leibniz' Diff.rechnung, nur mit Pünktchen über den Größen statt d davor.

Spätere Arbeiten von Leibniz und Newton

Leibniz führt 1687 in einem *philosophischen* Streit mit Mallebranche den Begriff der Stetigkeit ein:

“Wenn die Voraussetzungen sich einander beständig nähern und sich schließlich ineinander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt, das gleiche tun.”

Dieses Gesetz benutzt er in Streitigkeiten über das Unendlichkleine in der Diff.rechnung.

Das Stetigkeitsgesetz sei das Grundgesetz der Infinitesimalrechnung.

Er geht damit den Newtonschen Weg, daß Diff.quotienten dy/dx wohldefiniert sind, auch wenn dx und dy Denkschwierigkeiten machen.

In der Einleitung seiner Diff.Schrift von 1711 schreibt Newton, was wohl der größte Unterschied zwischen ihm und Leibniz ist:

“Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus kleinsten Teilen bestehend, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht etwa durch Aneinanderfügen von Teilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten, Oberflächen desgleichen durch Bewegung von Linien, Körper durch Bewegung von Oberflächen, Winkel durch Bewegung von Seiten, Zeiten durch ihren stetigen Fluß."

Das stimmt aber mit seinem Beweis der Drehimpulssatzes in den Principia nicht recht überein.

Und weiter, jetzt zur allgemeinen Geschichte:

"Ich suchte eine Methode, die Größen aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse, mittels deren sie entstehen, zu bestimmen, und indem ich diese Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse Fluxionen nannte und die erzeugten Größen Fluenten, verfiel ich allmählich in den Jahren 1665 und 1666 auf die Fluxionsmethode."

"Fluxionen verhalten sich so nahezu als möglich wie die in gleichen kleinsten Zeitteilchen erzeugten Vermehrungen der Fluenten."

Leibniz führt 1692 den Begriff der krummlinigen Koordinate ein:

“Unter Koordinaten verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Kurven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Koordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Koordinaten gewählten angehört.”

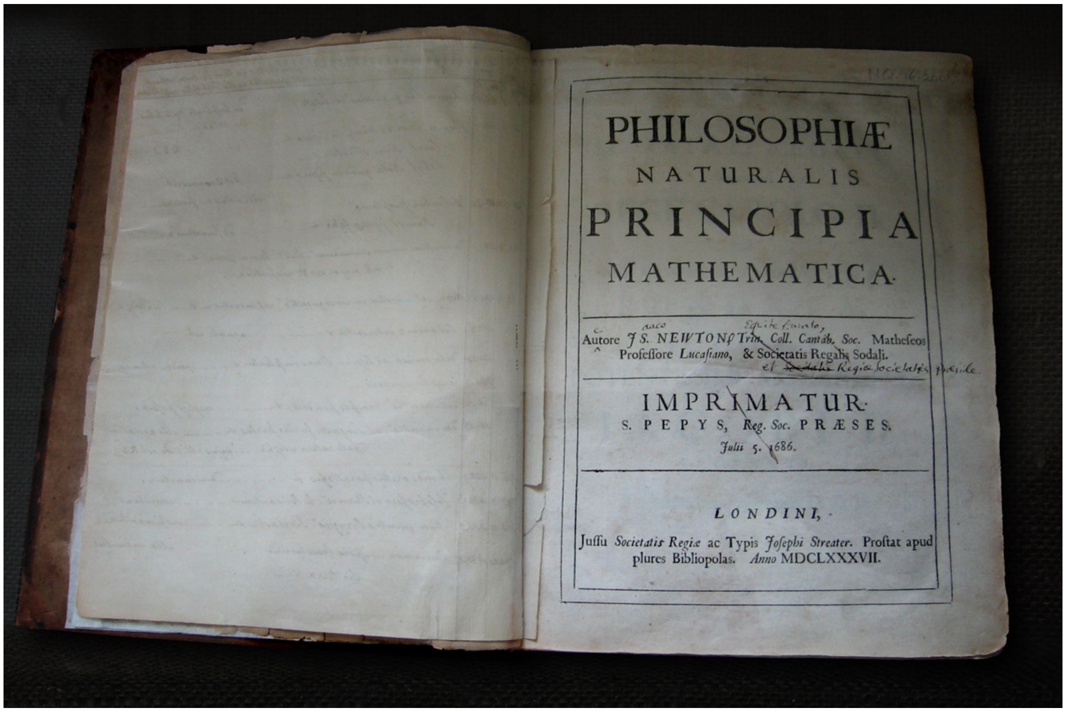
Vielleicht klarer nach dem lateinischen Original (Cantor, S. 211):
“Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cuiusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis.”

Abschließend: es sei hier nicht eingegangen auf den Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz ab 1699.

Dazu mehr als 40 (!) Seiten in Cantor.

Trägt zur Klärung der mathematischen Begriffe nichts bei.

Teil II: Die Principia Mathematica



Seit 1665 “hat” Newton Fluxionsrechnung.

1686 erster Teil der Principia druckfertig.

Doch in der Principia kein $\dot{x}$.

Infinitesimale Dreiecke dort sind durchaus aus älterer Infinitesimalrechnung bekannt.

Der Gang der Principia:

Erste Seiten: Definition.

Def II: quantity of motion is velocity (times) quantity of matter.

Also quantity of motion = Impuls.

Dann Def von Zentralkräften: wirken entlang Verbindungslinie.

Dann mehrere Seiten reiner Text über "true motion" usw.

Neues Kapitel: Axioms or laws of motion

Law II: The change of motion is proportional to the motive force impressed.

Korollar: Kräfteparallelogramm (mit Bild)

Wieder mehrere Seiten Textdiskussion (Inertialsystem! usw.)

Dann Beginn von "Book One: The Motion of Bodies"

Cantor zitiert ausführlich die ersten 11 Lemmas Newtons. Daher auch hier.

[Folien der Seiten 25 bis 30]

[Folien des Originaldrucks]

Es folgt ein längeres Scholium (einige Seiten).

Dann schlagartig: Section II

The Determination of Centripetal Forces

Beweis des Keplerschen Flächensatzes.

[Folien der Seiten 32 und 33]

[Folien des Originaldrucks]

Das Ellipsengesetz ist um einiges schwieriger:

Section III. Proposition 11. Problem 6.

[Folien der Seiten 42 und 43]

[Folie des Originaldrucks]

Dann sehr lange über:

Bestimmung von Kegelschnitten (Ellipse, Hyperbel) bei vorgegebenen Bahnelementen

(z.B. Brennpunkt gegeben u.a., wie lautet Bahn?)

(oder: welche Ellipse hat diese und jene Tangenten?)

Dann: Bahngeschwindigkeiten.

Bahnbewegungen ausgedehnter Körper.

Section XII:

The Attractive Forces of Spherical Bodies.

[Folien der Seiten 131ff]

Prop 70, Theorem 30

Prop 71, Theorem 31

Prop 72, Theorem 32

Prop 73, Theorem 33

Prop 74, Theorem 34

Zusammenfassung Buch I: (S steht für Section)

S 1: 11 Differentiallemma

S 2: Flächensatz. Ellipsenbahn mit Kraftzentrum im Ellipsenzentrum (nicht Brennpunkt)

S 3: Keplers Ellipsengesetz. Allgemeine Kegelschnitte

S 4: Bestimmung der Kegelschnitte bei gegebenem Brennpunkt

S 5: Bestimmung der Kegelschnitte durch gegebene Punkte

S 6: Bestimmung der Bahngeschwindigkeit

S 7: Geometrie der Bahngeschwindigkeit: Vgl mit Abrollbahnen usw.

S 8: Bahneigenschaften bei beliebigen Zentralkräften

S 9: Bewegung von Massen in Orbits (Ellipsen), die sich selbst drehen

S 10: Pendelbewegung. Zykloidenpendel

S 11: Bewegung von ausgedehnten Körpern umeinander bei Zentralkräften. Qualitative Gezeitentheorie

S 12: Anziehung von Sphären

S 13: Anziehung von nichtsphärischen Körpern

S 14: Bewegung kleiner Körper im Zentralkraftfeld ausgedehnter Körper

Buch II: Bewegung in Medien mit Reibung. Hydrodynamik.

Buch III: Himmelsmechanik, samt Gezeitenrechnungen.

Berühmte Stelle im zweiten Buch:

"In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.G. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sich dieselbe eben so gut auf irrationale wie rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte, welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann autwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte, und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen."

Newton bringt dann die Produktregel als Scholium.

Dennoch, die Fluxionsmethode wird auch weiterhin nicht verwendet.

Teil III: Humes Kritik am Kausalitätsgesetz

Berühmtes Zitat aus Kants Prolegomena [S. 260 der Akademieausgabe]

“Ich gestehe frei: die Erinnerung des David Hume war eben dasjenige, was mir vor vielen Jahren zuerst den dogmatischen Schlummer unterbrach und meinen Untersuchungen im Felde der spekulativen Philosophie eine ganz andere Richtung gab. Ich war weit entfernt, ihm in Ansehung seiner Folgerungen Gehör zu geben...”

Hume: Kausalität ist nur empirisch: Gewohnheit.

Ursache-Wirkung-Verknüpfung nur aus bisher bekannten Fällen.

Ausnahmen jederzeit möglich.

Kant: Kausalität ist, wie Raum und Zeit, a priori gegeben:

ein Denkschema, durch das wir die Sinnesdaten schicken.

Humes Hauptwerk: Treatise of Human Nature.

1739 im Alter von 28 Jahren veröffentlicht!

1736 bereits abgeschlossen.

(Jurastudium seit dem Alter von 12, mit 15 abgebrochen).

Wegbereiter des Utiliarismus.

Wichtige Arbeiten zur Nationalökonomie und zur englischen Geschichte.

Sein literarischer Nachlassverwalter: Adam Smith.

Untertitel des Treatise:

"An attempt to introduce the experimental method of reasoning into moral subjects."

Keine direkte Bekanntschaft Humes (1711-1776) mit Kant (1724-1804).

Aber Bekanntschaft Humes mit Rousseau.

Aus W.G. Sebald "Logis in einem Landhaus", S. 67.
"Anfang Januar 1766 reist Rousseau nach England. Dort, ganz in der Fremde, überwältigt ihn mehr und

mehr der immer in ihm latent gewesene und durch die Exilierung akut gewordene Verfolgungswahn. Seine Stimmung schwankt zwischen Niedergeschlagenheit und Exaltation. Ein gewisser J. Cradock berichtet in seinen 1828 in London veröffentlichten Literary and Miscellaneous Memoirs, daß Rousseau, obgleich er das Englische kaum verstand, bei einem Theaterbesuch, zu dem er von Garrick eingeladen war, so über die an diesem Abend gegebene Tragödie geweint und über die sich anschließende Komödie gelacht habe, daß er vollkommen außer sich geriet... Hume selber hatte einemal Gelegenheit, diese Stimmungsumschwünge zu beobachten, als Rousseau mit Verdächtigungen zu ihm kam und eine Stunde wortlos und finster in seinem Zimmer hin- und herging, nur um sich ihm dann auf einmal auf den Schoß zu setzen, ihm das Gesicht abzuküssen und ihn unter Tränen seiner ewigen Freundschaft und Dankbarkeit zu versichern. Danach dauerte es nicht mehr lang, bis ihm auch Hume als einer der hinterhältigsten Intriganten erschien, der danach trachtete, ihn um seinen Lebensunterhalt und seine Ehre zum bringen."

Zitate zum Kausalbegriff:

"And as the power, by which one object produces another, is never discoverable merely from their idea, 'tis evident *cause* and *effect* are relations, of which we receive information from experience, and not from any abstract reasoning or reflexion. [69:6-]

"I have already observe'd, that geometry, or the *art*, by which we fix the proportions of figures; tho' it much excels, both in universality and exactness, the loose judgments of the senses and imagination; yet never attains a perfect precision and exactness. Its first principles are still drawn from the general appearance of the objects; and that appearance can never afford us any security, when we examine the prodigious minuteness of which nature is susceptible." [70:3-]

"The reason why I impute any defect to geometry, is, because its original and fundamental principles are deriv'd merely from appearances; and it may perhaps be imagin'd, that this defect must always attend it, and keep it from ever reaching a greater exactness in the comparison of objects or ideas, than what our eye or imagination alone is able to attain."

Teil IV: Kant

Leben

1724 bis 1804: Spätphase der Aufklärung

KdrV 1781/1787. Sturm auf die Bastille 1789

Heutiges Kant-Bild durch seine Spätphase bestimmt:

der pünktliche Spaziergänger.

In seinen 30er und 40er Jahren, während der russischen Besetzung Königsbergs, war Kant eifriger Salonbesucher.

Critik
der
reinen Vernunft

von

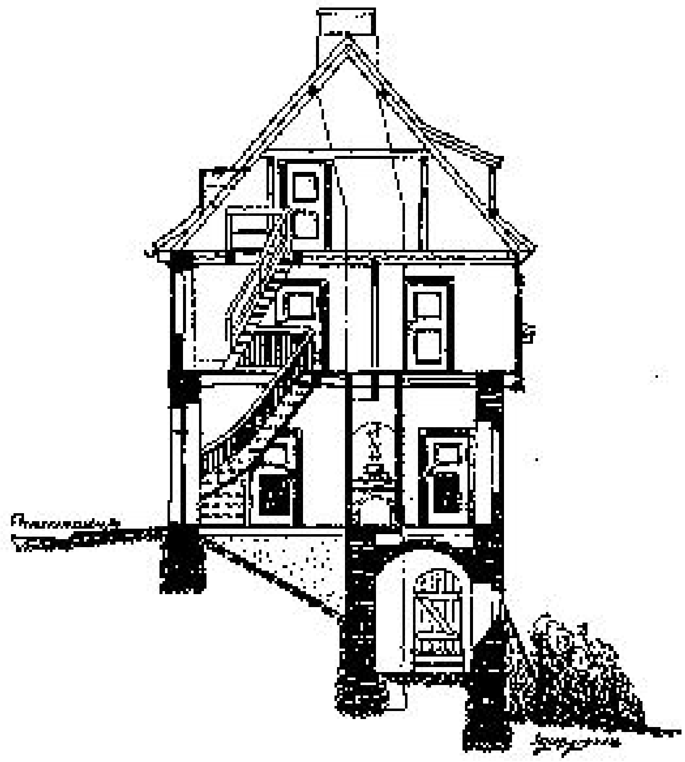
Immanuel Kant

Professor in Königsberg.

Riga,

verlegts Johann Friedrich Hartknoch

1781.



Dann aber: lehnt Professuren in Erlangen, Jena und Halle ab, weil er sich Wegzug von Königsberg nicht vorstellen kann. Sein Hörergeld als Privatdozent reiche ihm aus.

(Vergleiche Heidegger).

Mit 46 Jahren Professur in Königsberg.

11 Jahre später, 1781, erscheint die KkrV.

Recherche: angeblich schottische Vorfahren (Großvater). Kant aus Kent?

Sein Vater war Handwerker.

Sein Sprachstil

Angeblich mit Kleist vergleichbar.

Hypothese: an Rechtswissenschaften angelehnt (eben wie Kleist).

Wahrscheinlicher aber: lateinische Syntax im Deutschen.

Denn: (i) Latein war Kants zentrales Schulpensum.

(ii) Bis heute Unsicherheiten, welchen grammatischen Fall Kant an manchen Stellen meinte.

(iii) Starker Gebrauch von Pronomen.

Beliebte Zitate

"Der grösste Sinnesgenuss, der gar keine Einmischung von Ekel bei sich führt, ist, im gesunden Zustande, Ruhe nach der Arbeit." (Anthropologie)

Nichtinteresse
Interesse. Gefühl der Lust und Unlust

Das Wohlgefallen (complacentia) ist der consensus ~~[illegible]~~ cum causalitate repraesentationum. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] complacentiae [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] facultas appetitiva. + consensus cum

aliter + causalitas repraesentationum est vel subiectiva vel obiectiva [illegible] prior sensus complacentiae vel displicentiae — posterior appetitus facultas appetit. v. aversat. Das Gefühl der Lust.

Causalitas subiectiva repraesentationum est conatus conservationis sui ipsius et repraesentationes vel sunt sensitivae vel intellectuales. [illegible] intellectual. [illegible] [illegible] [illegible] (voluptas [illegible]) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] reflexion [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] — Geschmack —

Die intellectuelle Lust ist [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] obiecto an [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (als noumenon) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Lust an der causalitaet des Verstandes und der [illegible] ([illegible]) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] causalitaet [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] intellectuelle Lust [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] intellectuelle [illegible] — [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Urtheilskraft [illegible] [illegible] [illegible] Begriffe. [illegible] [illegible] [illegible] Geschmack. [illegible]

Die Urtheilskraft ist überhaupt das Vermögen, der Unterscheidung der allgemeinen Regel [illegible] in Ansehung der [illegible] des Besonderen [illegible] [illegible] [illegible] ([illegible]). [illegible] [illegible] [illegible] schemata [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] allgemein [illegible] Urtheilskraft [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Schematismus [illegible] [illegible] Einbildungskraft [illegible]. Die Urtheilskraft [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Einbildungskraft in ihrer Freyheit mit dem Gesetz des Verstandes [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Urtheilskraft.

~~[illegible]~~ (a + a)(o)

Lust — Unlust — Gleichgültigkeit. Gut — Böse — adiaphora

[illegible]

“Die leichte Taube, indem sie im freien Fluge die Luft teilt, deren Widerstand sie fühlt, könnte die Vorstellung fassen, dass es ihr im luftleeren Raum noch viel besser gelingen werde.”

(Zu den angeblich langen Kant-Sätzen: versuchen Sie diesen Satz kürzer zu sagen.)

“Die am Himmelfahrtstage durch Versalzung des Butterfisches früh morgendes fehlgeschlagene Kocherei muss nicht mehr vorkommen.” (Handschriftlicher Nachlass)

Im unteren Stockwerk seines Hauses befand sich sein Hörsaal.

Ein Satz: das Programm der KdrV

Nichts, als die Nüchternheit einer strengen, aber gerechten Kritik, kann von diesem dogmatischen Blendwerke, das so viele durch eingebildete Glückseligkeit, unter Theorien und Systemen, hinhält, befreien, und alle unsere spekulative Ansprüche bloß auf das Feld möglicher Erfahrung einschränken, nicht etwa durch schalen Spott über so oft fehlgeschlagene Versuche, oder fromme Seufzer über die Schranken unserer Vernunft, sondern vermittelst einer nach sicheren Grundsätzen vollzogenen Grenzbestimmung derselben, welche ihr nihil ulterius mit größester Zuverlässigkeit an die herkulische Säulen heftet, die die Natur selbst aufgestellet hat, um die Fahrt unserer Vernunft nur so weit, als die stetig fortlaufende Küsten der Erfahrung reichen, fortzusetzen, die wir nicht verlassen können, ohne uns auf einen uferlosen Ozean zu wagen, der uns unter immer trüglichen Aussichten, am Ende nötigt, alle beschwerliche und langwierige Bemühung, als hoffnungslos aufzugeben.

1. Das Ding an sich

2. Raum und Zeit a priori

[siehe Textmarkierungen in KdrV (Reclam)]

3. Erfahrung und Erkenntnis a priori

Folglich ist uns keine Erkenntnis a priori möglich, als lediglich von Gegenständen möglicher Erfahrung. (KdrV, B 166)

Und wie sollte es auch möglich sein, durch die Einheit des Bewußtseins, die wir selbst nur dadurch kennen, daß wir sie zur Möglichkeit der Erfahrung unentbehrlich brauchen, über Erfahrung (unser Dasein im Leben) hinaus zu kommen...? (KdrV, B 420)

Die Einheit des Bewußtseins, welche den Kategorien zum Grunde liegt, wird hier für Anschauung des Subjekts als Objekts (!) genommen, und darauf die Kategorie der Substanz angewandt. Sie ist aber nur die Einheit im *Denken*, wodurch allein kein Objekt gegeben wird, worauf also die Kategorie der Substanz, als die jederzeit gegebene *Anschauung* voraussetzt, nicht angewandt, mithin dieses Subjekt gar nicht erkannt werden kann. (KdrV, B 421)

4. Das Ich

Wenn ich mit dem *intellektuellen Bewußtsein* meines Daseins, in der Vorstellung *Ich bin*, welche alle meine Urteile und Verstandeshandlungen begleitet, zugleich eine Bestimmung meines Daseins durch *intellektuelle Anschauung* verbinden könnte, so wäre zu derselben das Bewußtsein eines Verhhältnisses zu etwas außer mir nicht notwendig gehörig. Nun aber jenes intellektuelle Bewußtsein zwar vorangeht, aber die innere Anschauung, in der mein Dassein allein bestimmt werden kann, sinnlich und an Zeitbedinguung gebunden ist, diese Bestimmung aber, mithin die innere Erfahrung selbst, von etwas Beharrlichem, welches in mir nicht ist, folglich nur in etwas außer mir, wogegen ich mich in Relation betrachten muß, abhängt: so ist die Realität des äußeren Sinnes mit der des innern, zur Möglichkeit einer Erfahrung überhaupt, notwendig verbunden: d. i. ich bin mir eben so sicher bewußt, daß es Dinge außer mir gebe, die sich auf meinen Sinn beziehen, als ich mir bewußt bin, daß ich selbst in der Zeit bestimmt existiere. (KdrV, B XL)

Also nur dadurch, daß ich ein Mannigfaltiges gegebener Vorstellungen *in einem Bewußtsein* verbinden kann, ist es möglich, daß ich mir die *Identität des Bewußtseins in diesen Vorstellungen* selbst vorstelle. (KdrV, B 133)

Hier ist nun der Ort, das Paradoxe, was jedermann bei der Exposition der Form des inneren Sinnes auffallen mußte (§6), verständlich zu machen: nämlich wie dieser auch so gar uns selbst, nur wie wir uns erscheinen, nicht wie wir an uns selbst sind, dem Bewußtsein darstelle, weil wir nämlich uns nur anschauen wie wir innerlich *affiziert* werden, welches widersprechend zu sein scheint, indem wir uns gegen uns selbst als leidend verhalten müßten. (KdrV, B 152)

...mithin, wenn wir von den letzteren einräumen, daß wir dadurch Objekte nur so fern erkennen, als wir äußerlich affiziert werden, wir auch vom inneren Sinne zugestehen müssen, daß wir dadurch uns selbst nur so anschauen, wie wir innerlich *von uns selbst* affiziert werden, d. i. was die innere Anschauung betrifft, unser eigenes Subjekt nur als Erscheinung, nicht aber nach dem, was es an sich selbst ist, erkennen. (KdrV, B 156)

...und ich habe also demnach keine *Erkenntnis* von mir *wie ich bin*, sondern bloß wie ich mir selbst *erscheine*. Das Bewußtsein seiner selbst ist also noch lange nicht ein Erkenntnis seiner selbst. (KdrV, B 158)

...und ich existiere als Intelligenz, die sich lediglich ihres Verbindungsvermögens bewußt ist, in Ansehung des Mannigfaltigen aber, das sie verbinden soll, einer einschränkenden Bedingung, die sie den inneren Sinn nennt, unterworfen, jene Verbindung nur nach Zeitverhältnissen, welche ganz außerhalb den eigentlichen Verstandesbegriffen liegen, anschaulich machen, und sich daher selbst doch nur erkennen kann, wie sie, in Absicht auf eine Anschauung (die nicht intellektuell und durch den Verstand selbst gegeben sein kann), ihr selbst bloß erscheint, nicht wie sie sich erkennen würde, wenn ihre *Anschauung* intellektuell wäre. (KdrV, B 158)

Das Bewußtsein meiner selbst in der Vorstellung *Ich* ist gar keine Anschauung, sondern eine bloß *intellektuelle* Vorstellung der Selbsttätigkeit eines denkenden Subjekts. Daher hat dieses Ich auch nicht das mindeste Prädikat der Anschauung, welches, *als beharrlich*, der Zeitbestimmung im inneren Sinne zum Korrelat dienen könnte: wie etwa *Undurchdringlichkeit* an der Materie, als *empirischer* Anschauung, ist. (KdrV, B 278)

...wir, die wir so gar uns selbst nur durch innern Sinn, mithin als Erscheinung, kennen... (KdrV, B 334)

Ich, als denkend, bin ein Gegenstand des innern Sinnes... Dasjenige, was ein Gegenstand äußerer Sinne ist, heißt Körper. (KdrV, B 400)

Nun haben wir aber in der inneren Anschauung gar nichts Beharrliches, denn das Ich ist nur das Bewußtsein meines Denkens. (KdrV, B 412)

...im Bewußtsein meiner Selbst beim bloßen Denken bin ich das *Wesen selbst*, von dem mir aber freilich dadurch noch nichts zum Denken gegeben ist. Der Satz aber, Ich denke, so fern er so viel sagt, als: *ich existiere denkend*, ist nicht bloße logische Funktion, sondern bestimmet das Subjekt (welches denn zugleich Objekt ist) in Ansehung der Existenz, und kann ohne den inneren Sinn nicht stattfinden, dessen Anschauung jederzeit das Objekt nicht als Ding an sich selbst, sondern bloß als Erscheinung an die Hand gibt. (KdrV, B 429)

Die eigentliche Moralität der Handlungen (Verdienst und Schuld) bleibt uns daher, selbst die unseres eigenen Verhaltens, gänzlich verborgen. Unsere Zurechnungen können nur auf den empirischen Charakter bezogen werden. (KdrV, B 579)

Gleichwohl ist nichts natürlicher und verführerischer als der Schein, die Einheit in der Synthesis der Gedanken für eine wahrgenommene Einheit im Subjekte dieser Gedanken zu halten. (KdrV, A 402)

5. Kausalität

6. Die kosmologischen Beweise

Teil V: Variationsrechnung

Anfang: Newton, P.M., siehe weiter unten.
Konkreter Startpunkt: Johann Bernoulli 1696, Acta Eruditorum.
"Einladung zur Lösung eines neuen Problems."
"Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."
"Die Kurve AMB ist eine den Geometern sehr bekannte, die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat."
Erschien im Juniheft; also sechs Monate Frist.
Ein Jahr später:
"Cartesius, Fermat und andere ausgezeichnete Männer, welche einst für die Vorzüglichkeit ihrer Methoden [zur Bestimmung von Maxima und Minima] so heftig kämpften, als ob es sich um Herd und Altar handle, oder jetzt ihre Anhänger an ihrer Stelle, müssen offen eingestehen, daß, wer nur ihre Methoden kennt, hier ganz und gar stecken bleibt."
"Mit Recht bewundern wir Huygens, weil er zuerst entdeckte, daß ein schwerer Punkt auf einer gewöhnlichen Cycloide in derselben Zeit herabfällt, an wel-

cher Stelle er auch die Bewegung beginnt. Aber man wird starr vor Erstaunen sein, wenn ich sage, daß gerade die Cycloide, die Tautochrone von Huygens, die gesuchte Brachistochrone ist."

Bernoulli erkennt richtig:

nur wenn $v \sim \sqrt{h}$ (Galilei), ist Tautochrone = Brachistochrone = Cycloide.

Wenn aber $v \sim h$ wäre, dann sind die Tautochronen Kreise, die Brachistochronen Gerade.

Übung: zeige dies.

Richtige Einsendungen kam z.B. von Jacob Bernoulli: "Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich zugleich dafür andere vorlege."

Wieder in Acta Eruditorum, 1697.

Hierin eine neue Idee:

Man nehme auf ihr [der gesuchten schnellsten Bahnkurve] zwei unendlich nahe Punkte C und D an

Sei EI eine Gerade parallel zur x-Achse, die die Kurve CD schneidet.

(Ganz grob in der Mitte: Bernoulli macht hier eine umständliche, nicht weiter benutzte Konstruktion.)

Sei G der Schnittpunkt der Geraden EI mit dem Kurvenelement CD.

Weiter nach Cantor:

Johann Bernoulli 1698: Lehre von den kürzesten Linien (auf bestimmten Oberflächen).
Euler 1728: Gibt erstmals Differentialglg für kürzeste Linien an.
Diese DGL ist höchst ungewöhnlich und wird selten gesehen.
Euler 1732: Definiert Klassen isoperimetrischer Probleme:
"Solle man eine mit n Eigenschaften bereits versehene Kurve so bestimmen, daß sie eine (n+1)te Eigenschaft im größten oder kleinsten Maße besitze, so müsse man $n+2$ aneinanderstoßende Kurvenelemente in Betrachtung ziehen."
Mit diesem Prinzip und detaillierten geometrischen Betrachtungen löst er einige bekannte Extremalprobleme.
Euler macht hier aus einem Differential mittels integrierendem Faktor ein $totales$ Differential.
Ähnliches aber auch schon bei Johann Bernoulli.

Bewegung auf gekrümmten Oberflächen.

Wichtig für Relativitätstheorie.
Zeige mit Lagrange II, daß auf Kugel Grosskreise Geodäten sind.
Eulers "Mechanik" von 1736: nichtfreie Bewegung.
Siehe Cantor S. 852.

Freier Körper würde sich in Tangentialrichtung gerade gleichförmig bewegen.
Die Abweichung entsteht durch eine Zwangskraft senkrecht zur Bahn und Fläche.
Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie (Johann Bernoulli 1698):
Die Ebene, die durch drei infinitesimal benachbarte Trajektorienpunkte geht, steht senkrecht auf der Tangentenebene an die Zwangsfläche, in der die Bahn verläuft.
Beweis (offensichtlich) mit Bahnkrümmung erst von Euler (1736).
Euler zeigt tatsächlich zweierlei:
(1) Gleichung der kürzesten Linie in gegebener krummer Fläche.
(2) Die Bahn eines kräftefreien Körpers in einer krummen Fläche ist eine *kürzeste* Bahn.
Im selben Jahr 1736 Eulers Artikel über Kurven mit Minimal- und Maximaleigenschaften.
24 bisher einzeln gelöste Probleme durch einheitliche Ausgangsglg gelöst.

Erfindung der Variationsrechnung.

Wiederum aus Cantor.
Euler 1744 Summe aus seinen bisherigen Forschungen zu Extremalkurven:

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate
Methode aufzufinden krumme Linien mit Maximal- oder Minimaleigenschaft.
Kurzname: Methodus inveniendi.
Gemeinhin: Bernoullis Brachistochronenproblem [aus Mechanikvorlesung].
Historisch korrekt: schon Newton löst Variationsproblem in der Principia:
Form des Körpers kleinsten Strömungswiderstands?
Die Methode, Extremal eines Funktionals zu finden, benutzt Euler schon seit 1728:
erst begründet er, daß jedes infinitesimale Kurvenstück schon die Extremaleigenschaft der ganzen Kurven haben muß.
(Dies gilt nicht, wenn die Funktionargumente selbst Integrale sind.)
Sei F das zu minimierende Funktional.
sei abc ein infinitesimales Bogenstück der Kurve.
Wähle b' außerhalb der Kurve, in einem Abstand von b, der selbst wieder infinitesimal bezüglich der infinitesimalen Strecke abc ist.
Wenn die Kurve F extremiert, muß gelten

$$F(abc) - F(ab'c) = 0.$$

Diese Forderung gibt die DGL für die kürzeste Kurve.
Soweit allgemeine Theorie.

Jetzt viele Aufgaben, die von Theorie zu Beispiele gehen:
1. Aufgabe (noch reine Theorie):
Wie sich die Kurvenelemente ändern, wenn man $b \to b'$ macht.
[Übernehmen von Cantor Seite 861]
Nett hierbei:
es wird schon Prinzip verwendet, daß virtuelle Zeitverrückung 0 ist:
nämlich $\delta x = 0$, siehe Abb 141 auf S 861 in Cantor.
2. Aufgabe: allgemeine Formel für Extremalkurve.
Jetzt Beispiele:
Kürzeste Linie in der Ebene? Gerade!
nächstes Beispiel:
Welcher Rotationskörper hat geringsten Strömungswiderstand?
Lösung: dieselbe wie bei Newton.
Aufgabenstellung kann kaum Zufall sein:
Euler wußte, das Newton (nicht Bernoulli) das erste Variationsproblem gestellt und gelöst hat.
Warum nennt er ihn nicht (wenigstens im historischen Teil der methodus inveniendi)?
Möglicher Grund: Abneigung gegen Newton nach dessen Verhalten im Prioritätsstreit mit Leibniz.
Auch löst Euler bereits ein isoperimetrisches Problem:
Extremum unter Nebenbedingungen:

Was ist die geschlossene Kurve (Variationsproblem) gegebener, fester Bogenlänge (Nebenbedingung), die eine maximale Fläche umschließt (Extremum).
Antwort: der Kreis.
Idee: man kann nicht einen Kurvenpunkt b allein variieren, dadurch würde die Nebenbedingung verletzt. Variiere also einen infinitesimal benachbarten Punkt so mit, daß Nebenbedingung erfüllt bleibt.
Gibt zwei Glgen, Elimination, DGL der Kurve.
Weitere Kapitel des sehr langen Artikels bauen diese Ideen weiter aus, geben aber wenig neues.
1753 gibt Euler als Anwendung dieser recht schweren Methode an einem leichten Beispiel mit wohlbekannten Ergebnissen:
sphärische Trigonometrie.
Zusammenfassend (vor weiteren Details):

Eulers Methodus Inveniendi

siehe Oswalds Klassiker
[to do]
Elegante Wertung der Eulerschen Arbeit von Cantor:
"Die Variationsrechnung hatte durch Euler einen gewissen Abschluß gefunden, doch verdient sie in diesem Zustand den Namen Rechnung noch nicht, weil geometrische Überlegungen zu sehr im Vordergrund der Untersuchung stehen."

Lagranges ...

[to do]

Teil VI: Das d'Alembertsche Prinzip

bei Jakob Bernoulli (nach Szabo)
Jakob Bernoulli 1686 und 1691 (erratum) in den Acta Eruditorum:
Betrachte masselosen, waagrechten Stab.
Am linken Ende Drehgelenk: Stab will sich um diese Achse drehen.
Am rechten Ende Masse m_2 (Abstand r_1 vom Drehgelenk).
Irgendwo auf dem Stab Masse m_1 (Abstand r_2 vom Drehgelenk).
m_1, m_2 wollen gleich schnell fallen.
Können dies jedoch nicht wegen der starren Verbindung.
m_1 fällt langsamer als bei freiem Fall.
Behauptung: m_2 fällt schneller als bei freiem Fall.
Austausch von m_1 auf m_2 entlang Stab.
Sei l ein Punkt zwischen m_1 und m_2, wo gerade g wirkt.
Dann wirken nach Strahlensatz auf m_1, m_2 Beschleunigungen

$$b_1 = \frac{r_1}{l} g, \qquad b_2 = \frac{r_2}{l} g. \tag{1}$$

Verlorene Kraft:

Im freien Fall erfährt m_1 Geschwindigkeitszuwachs gdt.
Am Stab aber nur $b_1 dt$.
Also Geschwindigkeits-Zuwachsverlust $(g - b_1)dt$.
Also Impulszuwachsverlust $m_1(g - b_1)dt$.
Newton: Kraft ist Impulsänderung pro Zeit, also sogenannte verlorene Kraft $m_1(g - b_1)$.
Bei m_2 gewonnene Kraft $m_2(b_2 - g)$.
Bernoullis Postulat: diese Kräfte stehen im Hebelgleichgewicht

$$m_1(g - b_1) = m_2(b_2 - g).$$

Einsetzen von (1) gibt

$$l = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}.$$

Für viele Massen

$$l = \frac{\sum m_i r_i^2}{m_i r_i} = \frac{\Theta}{m r_s},$$

mit Trägheitsmoment Θ, Gesamtmasse m, Schwerpunkt r_s.

bei Johann Bernoulli 1703, 1717

Nach Duglas, "History of Mechanics," Dover.
Berühmtes Problem: „Zentrum der Oszillation."
Zwei Hebelarme mit gemeinsamer Drehachse O

... und festem Winkelabstand: verschweißt.
An deren Enden A, B Massen m_A, m_B.
Deren Bahn: Kreisbahnen (mit verschiedenem oder gleichen Radius).
Es wirkt verschiedene Gravitation $entlang$ der Bahn auf m_A, m_B.
Also fallen m_A, m_B verschieden schnell.
Gesucht: ihre gemeinsame Schwingungsperiode.
Zerlege Fallweg AU in Bahnanteil AI und IU senkrecht = radial dazu.
Wäre m_A allein, würde sie in Zeiteinheit bis I fallen.
Zerlege Fallweg BV = AU in Bahnanteil BJ und JV senkrecht dazu.
Wäre m_B allein, würde sie in Zeiteinheit bis J fallen.
Verschweißung der Pendel bewirkt stattdessen:
m_A fällt bis R, m_B fällt bis S, mit Kreisbogen AR = BS.

Bernoullis Idee:
m_A allein würde Extrastück RI fallen, weil Grav. entlang Bahn groß.
m_B muß im starren Doppelpendel Extrastück JS getrieben werden.
Kraft, die m_A entlang RI bewegen würde wäre m_A allein,

...wird im Doppelpendel benutzt, m_B Extrastück JS zu treiben.
Krafttransfer von m_A auf m_B.

Bernoullis Lösung:
Gleichheit der Drehmomente

$$m_A \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{IR} = m_B \cdot \mathrm{OB} \cdot \mathrm{JS}.$$

Alle Strecken positiv gezählt.

bei d'Alembert. (nach Dugas)
Literatur: R. Dugas, "History of Mechanics".
1742: Brief an Academie des Sciences.
1743: Buch "Traite de Dynamique".

Problemstellung:
Gegeben System von Massenpunkten mit WW-Kräften.
(Einfachster Fall: starre Verbindung; aber auch Federn möglich.)
Es herrsche statisches Gleichgewicht: Kräftebalance.
Irgendwelche Kräfte greifen an jeder Masse an.
Diese würden Bewegung verursachen,
der die Massen wegen Bindung mit anderen Massen nicht folgen kann:

Zwangsbedingung

Was ist die resultierende Bewegung jeder Punktmasse?

$Lösung:$ (sehr frei aus D'Alembert)
"Seien A,B,C Teilchen des Systems
und a, b, c ihre Bewegungen aufgrund angreifender Kräfte.
Die WW der Teilchen bewirkt Kräfte, die a, b, c abändern zu a,b,c.
Setze a zusammen aus wirklicher Bewegung a und einer anderen α.
Ebenso b zusammengesetzt aus b und β; c aus c und γ.
Die Massen A,B,C machen bei WW Bewegungen a,b,c.
α, β, γ müssen so sein, daß sie a,b,c nicht stören.
Hätten A,B,C also nur Bewegungen α, β, γ erfahren ...müßten sich α, β, γ untereinander aufgehoben haben.
Und das System wäre in Ruhe geblieben."

Methode also:

1) Zerlege Bewegungen a, b, c, die freie Massen wegen F^e machen würden,
2) in $a = \mathsf{a} + \alpha$, $b = \mathsf{b} + \beta$, $c = \mathsf{c} + \gamma$ so,

3) daß die Bewegung unter a,b,c dieselbe ist wie unter a, b, c
4) und das System unter α, β, γ in Ruhe bleibt.
5) Dann beschreiben a,b,c die Bewegung der Massen unter ihrer WW.

Teil VII: Die nichteuklidsche Geometrie

[to do: handschriftliches dazu]